

SZÉKFOGLALÓ ELŐADÁSOK A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁN

Patkós András

A RÉSZECSCKEFIZIKA REJTŐZKÖDŐ SZIMMETRIÁI



Terintetes vagy 97

Legfeljebb egy év alatt vérték: "
Létező esetek, melyekben kivált vidéken la-
gátoltatnak a határidőket megtartani: de hallga-
ni, mint összes szabályzatunkat erőlfelve tekintve
következzen éjre figyelmeztetni a T. Akadé-
mizsághoz.

mint összes ^{száma} következési ügyére figyelmeztet
szükségtelen.
Indoklásnyba hozatik tehát, hogy egyelőre az
1861. ^{rends.} 194. ^{194.} választott s szérfoglalás által meg nem
tett ^{rends.} tagok nevei a névanyagból kitöröltesse, az 1861.
évsz.ig választottak a pályára emelhetessék, jö-
vőre pedig a kitörölt hivatal oda utasítható, hogy
evidenciában tartás végett az újban választottakat,
míg szék nem foglaltat, a sorozatba fel ne vegye.

l, jan. 26. 1865.

Buller's Moor
Lough
Hollan Emory

853
1865

13 Kennedy Ligon
Montclair Lissly
John Henry
r. rag John Frank rag
George Lissly

Patkós András

A RÉSZECSEFIZIKA REJTŐZKÖDŐ SZIMMETRIÁI

SZÉKFOGLALÓK
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁN

A 2007. május 7-én megválasztott
akadémikusok székfoglalói

Patkós András

A RÉSZECSEFIZIKA
REJTŐZKÖDŐ
SZIMMETRIÁI



Magyar Tudományos Akadémia • 2015

Az előadás elhangzott 2007. december 12-én

Sorozatszerkesztő: Bertók Krisztina

Olvasószerkesztő: Laczkó Krisztina

Borító és tipográfia: Auri Grafika

ISSN 1419-8959

ISBN 978-963-508-794-5

© Patkós András

Kiadja a Magyar Tudományos Akadémia
Kiadásért felel: Lovász László, az MTA elnöke
Felelős szerkesztő: Kindert Judit
Nyomdai munkálatok: Kódex Könyvgyártó Kft.

CAPTATIO BENEVOLANTIE (SZERZŐI MENTEGETŐZÉS)

Örömmel fogadtam az MTA elnökének döntését, amely lehetőséget nyújt arra, hogy a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagjaként 2007. december 12-én tartott székfoglaló előadásom szerkesztett változata önálló füzetben megjelenjen. Az egykori előadás számítógépes prezentációját végiglapozva arról győződtem meg, hogy az azóta eltelt időszakban végzett kutatómunkámnak mindmáig szilárd alapját adja a 2001–2007 között megvalósított tudományos programom. A lehetőséggel éppen azért kívánok élni, mert az előadás óta eltelt közel hét év a közhiedelem szerint elegendő idő volt majdnem az összes sejttem cseréjére, még inkább az akkor bemutatott eredmények lényeges továbbfejlesztésére.

Érdemes vállalkozásnak tűnik tehát az egykori előadás anyagának a technikai részletekre is utaló részletességű bemutatása. A technikai-tudományos részletek elmondása annál inkább is indokolt, minthogy (az MTA lehetőségeit illető kishitűségem okán) az előadásnak a részecskefizikai elmélet felfedezéstörténetére vonatkozó részét, szélesebb olvasói körre számítva, 2008-ban már publikáltam [1]. Ott igyekeztem áttekintést adni a részecskefizikai szimmetriák teljes köréről. Most, a szakma és az érdeklődő egyetemi hallgatók figyelmében bízva, a kvantumtérelmélet ún. funkcionális technikáiról matematikailag formalizáltabb ismeretekkel szeretném „megkínálni” az olvasót. A részletesebb bemutatás okán egyetlen közelítő szimmetria, a *királis* szimmetria tárgyalására összpontosítom a figyelmem.

A dolgozat a választott témaköri fókuszon belül követi a székfoglaló előadás szerkezetét, de több kérdéskörben utal a 2007 óta elért eredményeimre is. A történeti áttekintést a 20. századi részecskefizika nagy alakjainak fényképei helyett alapvető dolgozataik gondolati magvának bemutatása képviseli a következő fejezetben. Ezt követően az erős kölcsönhatás effektív alacsony energiás modelljeinek megoldásában a kutatócsoportunkban követett kutatási iránnyal elért eredményeket tárgyalom. A perturbációszámításon túltekintő két megoldási módszert ismertetek. Mindkettőben elsőként a spontán szimmetriasértő alapállapotra vezető megoldások bemutatásával foglalkozom. Ezt követi a véges hőmérséklet és véges barionsűrűség hatására bekövetkező alapállapot-változások (fázisátalakulások) területén végzett vizsgálataink ismertetése. A záró fejezetben elhagyom az elméleti paraméterek (csatolási erősségek) mért értékeivel meghatározott világunkat. A csatolások hangolásával megvizsgálom milyen változáson esnének át az erős kölcsönhatás jelenségei a csatolási paraméterek más értékeivel jellemezhető, de szintén létezhetőnek tűnő világokban.

A RÉSZECSEKEFIZIKAI SZIMMETRIÁK ÉS MODELLEK TÖRTÉNETE

A téridőtől független belső szimmetria első példája Heisenberg javaslata volt 1932-ben [2] a protonnak és a neutronnak a magerő töltésfüggetlenségét értelmező, egységes kvantummechanikai objektumba foglalására:

$$|N\rangle = a_p|p\rangle + a_n|n\rangle, \quad |a_p|^2 + |a_n|^2 = 1. \quad (1)$$

A nukleon $|N\rangle$ állapotvektorának normatartó $SU(2)$ transzformációi nincsenek hatással az erős kölcsönhatások dinamikáját meghatározó Hamilton-operátorra:

$$U|N\rangle = e^{i\alpha^j \frac{\tau^j}{2}} \begin{pmatrix} a_p \\ a_n \end{pmatrix}, \quad UH_NU^\dagger = H_N. \quad (2)$$

Itt $\tau^j/2$, $j = 1, 2, 3$ az $SU(2)$ izospincsoport generátorait jelöli. Ennek

a globális szimmetriának az érvényességét Cassen és Condon [3], majd Wigner Jenő [4] igazolta, következményeit a magreakciók kísérletben mért hatáskeresztmetszeteivel összevetve. Az izospinszimmetria a természetben úgy valósul meg, hogy a nukleonmentes „vákuum”-állapot invariáns:

$$U|0\rangle = |0\rangle. \quad (3)$$

A magerő kialakulását Yukawa az elektrodinamika mintáját követve valamilyen erőter kvantumainak a nukleonok közötti cseréjére igyekezett visszavezetni. 1935-ben feltételezte az elektron és a proton között félúton lévő tömegű mezonnak, a pionnak a létezését [5]. A töltésfüggetlenség elvét 1938-ban Kemmer terjesztette ki a magerőt közvetítő erőterekre, azaz feltételezte a pozitív és a negatív töltésű mellett a semleges pionok létezését is [6]. Végül (ismert bonyodalmak után) 1947-ben a kozmikus sugárzás részecskéinek kölcsönhatásában keletkező részecskék között fedezték fel Yukawa hipotetikus erőterkvantumait.

Az erősen kölcsönható kvantumterek történetének következő lépése a növekvő nukleonszámú atommagok tulajdonságainak végtelen mérethez tartó extrapolációjával kialakított, véges nukleonsűrűséggel és energiasűrűséggel jellemzett *maganyag* leírására született σ -modell [7], amellyel Johnson és Teller 1955-ben a nukleonok közötti vonzó Yukawa-potenciált mezonterek kvantumainak a cseréjére vezette vissza:

$$L_{JT} = \bar{N}(x) (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_N) N(x) - \frac{1}{2} \sigma(x) (\square + m_\sigma^2) \sigma(x) - g\sigma(x) \bar{N}(x) N(x). \quad (4)$$

Ez a Lagrange-sűrűség az m_N tömegű nukleonok Dirac-egyenletét adó első tag mellett az m_σ tömegű skalár σ részecske (második tag) és a kettő közötti g erősségű kölcsönhatást megadó harmadik, ún. Yukawa-tagot tartalmazza. Meg kell jegyezni, hogy a magerők taszító törzsének értelmezésére egy tömeges (véges hatósugarú) vektormezonnal való kölcsönhatást is bevezettek,

de ez a jelen téma szempontjából érdektelen. Fontosabb kérdés, hogy miért nem szerepeltették a kísérletileg akkor már jól ismert pionokat? Valószínűleg a pszeudoskalár pionokhoz kapcsolódó bonyolultabb kölcsönhatási Lagrange-sűrűséget kívánták elkerülni. Ezt a hiányosságot alább Gell-Mann és Lévy σ -modelljének bemutatásakor pótoljuk.

A jelen elemzés szempontjából (4) azért érdekes, mert a véges sűrűségű maganyag ún. átlagtér tárgyalásában lépett fel először a nukleon-antinukleon kondenzátumként értelmezhető várható érték, amely az erős kölcsönhatások megértésének egyik kulcsobjektuma. E kondenzátumnak a kapcsolatát azonban valamely rejtőzködő szimmetriával további 5–6 év elteltével ismerték csak fel.

A Heisenberg-képben a következő mozgásegyenletek érvényesek az operátorokra:

$$(\square + m_\sigma^2)\sigma(x) - g\bar{N}(x)N(x) = 0, \quad (i\gamma_\mu\partial^\mu - m_N + g\sigma(x))N(x) = 0. \quad (5)$$

Tételezzük fel, hogy a kvantumelmélet megoldásaként a $\sigma(x)$ térnek homogén időfüggetlen várható értéke van. (A várható értéket a szokásos $\langle \dots \rangle$ jelöléssel tüntetjük fel.) Ebből azonnal látszik, hogy hatására a nukleonok maganyagbeli tömege megváltozik a vákuumbeli értékhez képest:

$$\langle \sigma(x) \rangle = \Sigma, \quad m_{eff} = m_N - g\Sigma. \quad (6)$$

A megoldás konstrukciójához az $E^2 = k^2 + m_{eff}^2$ diszperziós relációt kielégítő nukleonállapotokkal feltöltjük a neutronok és a protonok Fermi-gömbjét a maganyag ρ_N sűrűsége által meghatározott k_N^F Fermi-impulzusig:

$$\rho_N = 4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(k_N^F - k) = \frac{2}{3\pi^2} k_N^{F3}, \quad (7)$$

ahol a $(2S + 1)(2I + 1) = 4$ szorzóval figyelembe vettük a nukleonok spin és izospin szerinti elfajulását. A maganyag sűrűségére a Weizsäcker-

cseppmodell képletéből extrapolált érték használható a Fermi-impulzus fizikai értékének a meghatározására. Miután egyszerű számítással egy k impulzusú módusban: $\langle \bar{N}N \rangle_k = m_{eff}/E$, így végül az átlagteret meghatározó „gap”-egyenlet a következő:

$$m_\sigma^2 \Sigma = \frac{2g}{\pi^2} m_{eff} \int_0^{k_N^F} dk \frac{k^2}{(k^2 + m_{eff}^2)^{1/2}}. \quad (8)$$

Ennek az egyenletnek $\Sigma = 0$ megoldása csak $k_N^F = 0$ esetén áll fenn, tehát a maganyag véges sűrűségét véges amplitudójú barion- (nukleon)-kondenzátummal is jellemezhetjük. A kondenzátumot tartalmazó alapállapot ebben a modellben az elmélet szimmetriájától függetlenül, a véges nukleonsűrűség hatására alakul ki.

A barionkondenzátum *spontán* kialakulásának lehetőségét az erős kölcsönhatások gerjesztésmentes $|0\rangle$ alapállapotában Yoichiro Nambu vetette fel elsőként 1960-ban [8]. A nukleonok teljes tömegét a skalár átlagtérből kívánta származtatni. Nulla induló tömeg esetén a szabad nukleonok Lagrange-sűrűsége két tag összegére írható szét:

$$L_N = \bar{N}(x) i\gamma_\mu \partial^\mu N(x) = \bar{N}_L(x) i\gamma_\mu \partial^\mu N_L(x) + \bar{N}_R(x) i\gamma_\mu \partial^\mu N_R(x), \quad (9)$$

ahol

$$N_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} N, \quad N_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} N. \quad (10)$$

Ezen a két tagon egymástól függetlenül végezhető el egy-egy $SU(2)$ csoport-elemmel valamilyen szimmetriaművelet. Ezt a szimmetriát expliciten sérti az $m_N \bar{N}(x)N(x)$ tömegtag. Ha az unitér transzformációs mátrixokat

$$U_L = e^{i\Theta_{Lj}\tau^j}, \quad U_R = e^{i\Theta_{Rj}\tau^j} \quad (11)$$

alakban írjuk, a nukleon tér transzformációja

$$N(x) \rightarrow \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} e^{i\Theta_{Lj}\tau^j} + \frac{1 + \gamma_5}{2} e^{i\Theta_{Rj}\tau^j} \right) N(x) \quad (12)$$

alakú lesz, és ezt át lehet rendezni a $\Theta_{Vj} = (\Theta_L + \Theta_R)/2$, $\Theta_{Aj} = (\Theta_R - \Theta_L)/2$ új paraméterek használatával az

$$N(x) \rightarrow e^{i\Theta_{Vj}\tau^j + i\gamma_5\Theta_{Aj}\tau^j} N(x) \quad (13)$$

alakra. Az átrendezett szimmetriát $SU_V(2) \times SU_A(2)$ vektor-axiálvektor szimmetriaként említik. Az $\bar{N}_i \mathcal{M}_{ij} N_j$ tömegtag transzformációja a kombi-nált infinitezimális $\delta\Theta_A$, $\delta\Theta_V$ paraméterekkel jellemzett művelet hatására a következő:

$$\delta L_{mass} = i\bar{N}(x) [\delta\Theta_{Vj}[\tau_j, \mathcal{M}]_- - \delta\Theta_{Aj}[\tau^j, \mathcal{M}]_+] N(x). \quad (14)$$

Ha $\mathcal{M} \sim I$ (egzakt izoszimmetria), akkor csak az axiális transzformáció szimmetriája sérül, azaz az explicit szimmetriasértést követő tömeggenerálás az $SU_V(2) \times SU_A(2) \rightarrow SU_V(2)$ szimmetriacsökkenést okozza.

A skalártérrel való (4) Yukawa-kölcsönhatás viszont általánosítható úgy, hogy az $SU(2) \times SU(2)$ *királis szimmetria* érvényesüljön:

$$L_{Yukawa} = -g (\bar{N}_L(x) M(x) N_R(x) + \bar{N}_R(x) M^\dagger(x) N_L(x)), \quad (15)$$

amennyiben az $M(x)$ mezonmátrixra az

$$M \rightarrow U_L M(x) U_R^\dagger, \quad M = \sigma(x) + i\eta(x) + (a_{0j}(x) + i\pi_j(x))\tau^j \quad (16)$$

transzformációs szabályt és parametrizációt írjuk elő. (Az egyes komponensek betűjelei egybeesnek a részecskefizikai táblázatban szereplő azon rezonanciák jelével, amelyek tulajdonságai a legközelebb állnak a szimmetria feltevéséből következő szabályszerűségekhez.)

Az M -tér dinamikáját egyszerűen definiálhatjuk, figyelembe véve, hogy $SU(N) \times SU(N)$ szimmetria esetén $N - 1$ független invariáns képezhető: $\text{Tr}(M^\dagger M)^n$, $n = 1, \dots, N - 1$. Ezért a nemritka mezonok effektív elméletében

egyedül csak a $\text{Tr}(M^\dagger M) = 2(\sigma^2 + \eta^2 + a_{0j}^2 + \pi_j^2)$ invariánstól függhet a lokális energiasűrűség:

$$\begin{aligned} L_M &= \frac{1}{4} \text{Tr} (\partial_\mu M^\dagger(x) \partial^\mu M(x) - \mu^2 M^\dagger(x) M(x)) - \frac{\lambda}{16} (\text{Tr}(M^\dagger(x) M(x)))^2 \\ &= \frac{1}{2} [\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \partial_\mu a_{0j} \partial^\mu a_{0j} + \partial_\mu \pi_j \partial^\mu \pi_j - \mu^2 (\sigma^2 + \eta^2 + a_{0j}^2 + \pi_j^2)] \\ &\quad - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \eta^2 + a_{0j}^2 + \pi_j^2)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

A mezondinamikának önmagában $O(8)$ ortogonális szimmetriája van. A potenciál stabilitásához kötelező előírás $\lambda > 0$, viszont megengedett a $\mu^2 < 0$ eset is. Ekkor a potenciál minimuma nem az origóban van. A megvalósuló minimum „iránya” választható a σ térnek, nagysága a Σ átlagtérnek. A Yukawa-tagból leolvasható, hogy a spontán irányválasztással a nukleonoknak $M_N = g\Sigma$ tömege generálódott, és bekövetkezett a fentebb jelzett szimmetriaredukció.

A mezonspektrum könnyebb tagjait (σ, π) tartva meg, továbbá a királis nukleonprojekciók explicit (10) kifejezéseit használva, Gell-Mann és Lévy [9] lineáris szigma-modelljére jutunk:

$$\begin{aligned} L_\sigma &= \bar{N}(x) i\gamma_\mu \partial^\mu N(x) + \frac{1}{2} [(\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \pi_j)^2 - \mu^2 (\sigma^2 + \pi_j^2)] \\ &\quad - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi_j^2)^2 - g \bar{N}(x) (\sigma(x) + i\gamma_5 \tau^j \pi_j(x)) N(x). \end{aligned} \quad (18)$$

A szimmetriasértés után a σ -mező tömeget nyer:

$$\sigma_{min}^2 = -\frac{\lambda}{\mu^2}, \quad m_\sigma^2 = -2\lambda\mu^2, \quad (19)$$

ugyanakkor a pionok zérus tömegűek lesznek. Ez Goldstone tételének [10] megnyilvánulása ebben a modellben. Összefoglalva: látjuk, hogy az erős kölcsönhatás Nambu által javasolt közelítő királis szimmetriája képes értelmezni a pionok és a nukleonok közötti tömeghierarchiát. A pionok véges

tömegét a szimmetria explicit (a Lagrange-sűrűségben megjelenő) sértésével lehet figyelembe venni.

A továbbiakban a királis szimmetriasértés kvantumszintű tárgyalására fókuszálunk, ezért főként a mezondinamikára korlátozzuk vizsgálódásunkat. Megemlítjük, hogy a tiszta piondinamikához is eljuthatunk a lineáris szigma-modellből, ha a mezonmátrixot

$$M(x) = S(x)e^{i\tau^j \pi_j(x)/2F} \equiv S(x)U(x), \quad U(x) \in SU(2) \quad (20)$$

alakban nemlineárisan parametrizáljuk. Ekkor a mezonok potenciális energiája csak $S(x)$ -től függ, azaz a π -terek csak a deriváltakat tartalmazó („kinetikus”) részben jelennek meg:

$$L_{kin} = \frac{1}{2} \partial_\mu S(x) \partial^\mu S(x) + \frac{1}{4} S^2(x) \text{tr} \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U. \quad (21)$$

Ha a modellt olyan tartományban oldjuk meg, ahol a nehéz $S(x)$ tér alig ingadozik az s_0 átlagérték körül, akkor a pionterekre erősen nemlineáris elméletet kapunk:

$$L_\pi = \frac{s_0^2}{4} \text{tr} \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U. \quad (22)$$

Ennek az elméletnek nagy előnye, hogy egzakt kapcsolat állítható fel közte és a fundamentális kvantumkromodinamika között. Hátránya viszont, hogy csak a sértett fázisban van értelmezve, ezért a királis szimmetriasértés megszűnésével járó fázisátalakulás nem tanulmányozható ebben a keretben.

A másik irányban igyekezve továbblépni, megpróbálkozhatunk a mezonterek dinamikájának figyelembevételével a nukleonterekre korlátozódó elméletben. Tudva, hogy a mezonok kvantumainak cseréje negyedfokú, nemlokális kölcsönhatást generál a fermionok között, az eredményt elég ál-

talánosan a következő alakban várjuk:

$$S = \int dx \bar{N}(x) i \gamma_\mu \partial^\mu N(x) - g^2 \int dx \int dy (\bar{N}_L(x) N_R(x)) K(x, y) (\bar{N}_R(y) N_L(y)), \quad (23)$$

ahol $K(x, y)$ a nukleon-nukleon kölcsönhatásnak a mezoncseréből származó magfüggvénye. Ez az alak, amely őrzi az eredeti modellel királis szimmetriáját, Nambu és Jona-Lasinio effektív nukleonmodelljének [11] nem lokális változata.

A SZIMMETRIASÉRTÉS KVANTUMDINAMIKÁJA

A királis szimmetriasértés mechanizmusának elméleti vizsgálatában az elméleti modellek dinamikájának perturbatív kezelése nem ad kielégítő eredményt, mivel a mezon spektrumhoz igazított csatolási értékek nagysága megkérdőjelezi a csatolások hatványa szerinti sorfejtés alkalmasságát. A 2002-től végzett kutatásaink meghatározó technikája a perturbatív sorok részleges felösszegezése volt. A felösszegezés során külön figyelmet fordítottunk a perturbációs számításokon túllépő elméleti tárgyalás renormalizálhatóságának bizonyítására, mert csak ez biztosítja eredményeink érzéketlenségét a közbenső paraméterként bevezetésre kerülő maximális impulzus (levágás) értékére.

A szimmetriasértés tárgyalásának technikai vetületével foglalkozik a következő három fejezet. E fejezetben a csatolási állandó(k) értékének nagyságára érzéketlen módszert mutatok be: a mezonok száma (a *flavorszám*) reciprokának hatványa szerint haladó sorfejtést. Alább $T = 0$ hőmérsékleten tárgyalom az alapállapot és gerjesztéseinek tulajdonságait. A véges hőmérsékleten és barionsűrűségen fellépő jelenségekkel foglalkozik a következő fejezet, majd a perturbációs számítás *optimalizált* változatával nyert eredményekről lesz szó.

A nagy N sorfejtés

A következőkben a lineáris σ -modell mezonszektorát vizsgálom, abban az esetben, amikor a modell $O(N)$ szimmetriájának dimenziója $N \rightarrow \infty$. A tárgyalás elvi részében a [12, 16, 17] közlemények módszerét követem, és mutatok be néhány nemzetközi visszhangot kiváltó eredményt. A véges hőmérsékleten bekövetkező jelenségeket a [12, 13, 14] közleményekben vizsgáltuk. A mezonszektorhoz kvarktereket csatolva, a modellt kiterjesztettük véges barionsűrűség vizsgálatára is [15], amelyet szintén a nagy flavorszám határesetében oldottunk meg.

Az euklidészi metrikájú mezonmodell Lagrange-sűrűsége a következő:

$$L_M = \frac{1}{2} [\partial_n \varphi^a \partial_n \varphi^a + m^2 \varphi^a \varphi^a] + \frac{\lambda}{24N} \varphi^a \varphi^a \varphi^b \varphi^b - \sqrt{N} h \varphi^1. \quad (24)$$

Az indexek változási tartománya: $n = 1, \dots, d$, $a = 1, \dots, N$. A h külső tér explicit szimmetriasértést képvisel, amelynek hatása a rendszer potenciális energiájának minimumát az $a = 1$ irányba húzza el az origóból.

Elsőként az explicit sértésnek megfelelően

$$\varphi^a = (\sqrt{N}v + \sigma, \pi^l), \quad l = 2, \dots, N \quad (25)$$

alakban parametrizált háttéren határozzuk meg v egyenletét a kvantumfluktuációk figyelembevételével. A homogén kondenzátum írásmódját úgy választottuk, hogy $v^2 \sim \mathcal{O}(1)$ esetén a modell potenciális energiasűrűségének mindhárom tagja egyaránt a szabadsági fokok számával arányos $\mathcal{O}(N)$ járulékot adjon. A Lagrange-sűrűségben a σ -ban lineáris tag együtthatójának várható értéke eltűnik, ha v stabil értékét választjuk:

$$\sqrt{N}v \left[m^2 + \frac{\lambda}{6} v^2 + \frac{\lambda}{6N} (\langle \sigma^2 \rangle + \langle \pi^l \pi^l \rangle) - \frac{h}{v} \right] = 0. \quad (26)$$

Ezt az egyenletet szokás *állapotegyenletnek* nevezni. Kihasználjuk, hogy a meghatározandó várható értékek az érintett terek propagátoraival kapcsolhatóak össze:

$$\langle \sigma^2 \rangle + \langle \pi^l \pi^l \rangle = G_\sigma(x, x) + (N - 1)G_\pi(x, x). \quad (27)$$

$N \rightarrow \infty$ esetén az állapotegyenletben csak a pionpropagátor jelenik meg:

$$m^2 + \frac{\lambda}{6}v^2 + \frac{\lambda}{6}G_\pi(x, x) - \frac{h}{v} = 0. \quad (28)$$

A pionpropagátor inverze a (25) eltolás után adódó hatás pionterek szerinti második deriváltjának várható értékeként kapható meg:

$$G_\pi^{-1}(x, y) = \left[-\square + m^2 + \frac{\lambda}{6}v^2 + \frac{\lambda}{6N} (\langle \sigma^2(x) \rangle + \langle (\pi^l(x))^2 \rangle) \right] \delta(x - y), \quad (29)$$

amelynek a Fourier-transzformáltja $N \rightarrow \infty$ -re a

$$G_\pi^{-1}(p) \equiv p^2 + M_G^2 = p^2 + m^2 + \frac{\lambda}{6}v^2 + \frac{\lambda}{6}G_\pi(x, x) \quad (30)$$

alakot ölti. Az állapotegyenlettel kombinálva kiolvasható, hogy

$$M_G^2 = \frac{h}{v}, \quad (31)$$

és ez a modellnek erre a közelítő megoldására a Goldstone-tétel érvényességét demonstrálja.

Mindkét egyenletet renormalizálni kell a

$$G_\pi(x, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + M_G^2} \equiv T(M_G) \quad (32)$$

integrál divergenciája miatt. A levágástól kvadratikusan, illetve logaritmikusan függő divergenciáknak önálló definíciókat adva, egy normalizációs skála

(M_0) bevezetése után a divergens járulékokat leválasztva, definiálhatjuk az ún. *tadpole*-integrál véges részét ($T^F(M_G)$):

$$G_\pi(x, x) = \int_k G_\pi(k) = T_d^{(2)} + (M_0^2 - M_G^2)T_d^{(0)} + T^F(M_G),$$

$$T_d^{(2)} = \int_k \frac{1}{k^2 + M_0^2}, \quad T_d^{(0)} = \int_k \frac{1}{(k^2 + M_0^2)^2}. \quad (33)$$

A renormalizáció eljárása a leválasztott divergenciáknak a beolvasztását jelenti az elméletet jellemző csatolási állandókba. Ehhez a (26) állapotegyenlet nem nulla v -t adó tényezőjét alkalmasan átírjuk:

$$\frac{1}{6}(T^F(M_G) + v^2) + \left[\frac{m^2}{\lambda} + \frac{1}{6} \left(T_d^{(2)} + M_0^2 T_d^{(0)} \right) \right] - M_G^2 \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{6} T_d^{(0)} \right] = 0. \quad (34)$$

Definiálva a (λ_R, m_R^2) renormalizált csatolásokat

$$\frac{m_R^2}{\lambda_R} = \frac{m^2}{\lambda} + \frac{1}{6} \left(T_d^{(2)} + M_0^2 T_d^{(0)} \right), \quad \frac{1}{\lambda_R} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{6} T_d^{(0)} \quad (35)$$

felírható a véges (renormalizált) állapotegyenlet, amelynek megoldása meghatározza v^2 -et [12]:

$$\frac{1}{6}(T^F(M_G) + v^2) + \frac{m_R^2}{\lambda_R} - \frac{1}{\lambda_R} M_G^2 = 0. \quad (36)$$

Ez a pusztán alkalminak látszó renormalizációs előírás a perturbatív el-
lentagok nyelvén a

$$\lambda_R \equiv \lambda \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta\lambda_n \right), \quad m_R^2 = m^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \delta m_n \quad (37)$$

végtelen összeggel vagy annak részösszegével kell, hogy értelmezhető legyen. A (35) összefüggések átrendezéséből azt látjuk, hogy definícióink valóban egy végtelenellentag-felösszegzésnek felelnek meg:

$$\delta\lambda_n = \left(-\frac{\lambda}{6} T_d^{(0)} \right)^n, \quad \delta m_n = \frac{1}{6} \left[T_d^{(2)} + (M_0^2 - m^2) T_d^{(0)} \right] \left(-\frac{1}{6} T_d^{(0)} \right)^{n-1}. \quad (38)$$

A végtelenellentag-renormalizáció fizikai értelmezéséhez alább a σ -tér és a $\varphi\varphi$ -kompozit tér sajátenergiáját meghatározó végtelen pionbuboréksor adható majd támaszul a Feynman-diagramok nyelvén. (A végtelen ellentagsor generálását és felösszegzésének egy iteratív eljárását részletesen kidolgozva bemutattuk egy $O(N) \times Z_2$ szimmetriájú skalár tereket tartalmazó elmélet példáján [19]. Az $O(N)$ modell tetszőleges N -re történő renormalizációját a 2PI formalizmus keretében kéthurok-szintig elvégeztük [20].)

A nagy N sorfejtés módszerének alkalmazásakor hatékony eljárás egy önálló dinamikával nem bíró *segédter* használata. Az $\alpha(x)$ mezővel kibővített (24) hatás a következő alakú:

$$S = \int d^d x \left[\frac{1}{2} ((\partial_m \varphi^a)^2 + m^2 (\varphi^a)^2) - \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2} \alpha \sqrt{\frac{\lambda}{3N}} (\varphi^a)^2 - \sqrt{N} h \sigma \right]. \quad (39)$$

A hatás variálásából α -ra adódó lokális algebrai egyenletet megoldva és visszahelyettesítve visszakapjuk a Lagrange-sűrűség eredeti, a φ^a mezonterek negyedfokú kölcsönhatását tartalmazó tagját. A (25) eltolás alkalmazása és az $\hat{\alpha} = \sqrt{\lambda/(3N)}\alpha$ átskálázás után az $\hat{\alpha}$ szerinti variáció várható értékével adódó

$$-\frac{3N}{\lambda} \hat{\alpha} + \frac{1}{2} [Nv^2 + G_{\sigma\sigma}(x, x) + (N-1)G_{\pi}(x, x)] = 0 \quad (40)$$

egyenletet *nyeregponti egyenlet*nek hívják, miután a segédváltozó „potenciálja” az $\hat{\alpha}$ változó mentén instabil. Itt $G_{\sigma\sigma}$ a csatolt $\alpha - \sigma$ szektor 2×2 -es propagátor mátrixának megfelelő elemét jelöli. A nyeregponti egyenlet párja a pionpropagátor, amely a segédter révén igen egyszerű lesz (a nyeregponti egyenlet megoldása térben állandó $\hat{\alpha}$ -t ad):

$$G_{\pi}^{-1}(k) = k^2 + m^2 + \hat{\alpha} \equiv k^2 + M_G^2. \quad (41)$$

Az állapotegyenletnek az előzőnél pontosabb alakját kapjuk meg a hatás

σ szerinti variációjának várható értékét képezve:

$$\sqrt{N}v \left[m^2 + \hat{\alpha} - \frac{h}{v} \right] + G_{\hat{\alpha}\sigma}(x, x) = 0. \quad (42)$$

Alább megmutatjuk, hogy az $\hat{\alpha} - \sigma$ propagátormátrix minden eleme $\mathcal{O}(N^0)$, ezért mind $G_{\sigma\sigma}$, mind $G_{\hat{\alpha}\sigma}$ elhagyható a vezető rendű megoldásból. Az $N = \infty$ határesetben érvényes egyenletekbe beírva az $\hat{\alpha} = M_G^2 - m^2$ kifejezést, a nyeregponti egyenletet az előző tárgyalás állapotegyenletével azonos módon lehet renormalizálni.

Az újdonságot a vezető rendű tárgyalás ezen változatában az hozza, hogy a piontérre elvégezve a funkcionális integrálást, meghatározható az $\hat{\alpha} - \sigma$ szektor propagátora is. Az integrálás után kapott hatás $\hat{\alpha}$ és σ funkcionálja:

$$\begin{aligned} S = & \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_m \sigma)^2 + \frac{1}{2} m^2 [Nv^2 + 2\sqrt{N}v\sigma + \sigma^2] - \sqrt{N}h(\sqrt{N}v + \sigma) \right. \\ & \left. - \frac{3N}{2\lambda} \hat{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \hat{\alpha} [Nv^2 + 2\sqrt{N}v\sigma + \sigma^2] \right] + \frac{N}{2} \text{Tr} \log(-\square + m^2 + \hat{\alpha}). \end{aligned} \quad (43)$$

Ebből kétszeri funkcionálderiválással kapható meg az $\hat{\alpha} - \sigma$ szektor inverz propagátormátrixa:

$$\mathcal{G}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{3N}{\lambda} \delta(x-y) - \frac{N}{2} D_\pi(x-y) D_\pi(y-x) & \sqrt{N}v \delta(x-y) \\ \sqrt{N}v \delta(x-y) & D_\pi^{-1}(x-y) \end{pmatrix}, \quad (44)$$

ahol $D_\pi^{-1}(x-y) = (-\square + M_G^2) \delta(x-y)$. (Itt a kompozit gerjesztés dinamikájának a σ -térhez csatolt tárgyalását [16] módszerét kölcsönözve mutatom be.) A pionbuborék, azaz $D_\pi(x-y) D_\pi(y-x)$ Fourier-transzformáltja logaritmikusan divergens, divergenciáját a korábban már bevezetett $T_d^{(0)}$ adja:

$$I(q, M_G) = \int d^d \xi D_\pi(\xi) D_\pi(-\xi) e^{-iq\xi} = T_d^{(0)} + I^F(q, M_G). \quad (45)$$

Ennek segítségével írva fel és invertálva a propagátormátrixot, annak minden eleme véges lesz a λ csatolás (35) egyenletben megadott renormalizációs összefüggését használva. Az invertálás eredménye alapján egyértelmű, hogy a segédter és σ azonos spektrummal rendelkeznek:

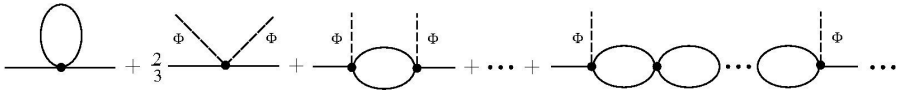
$$\begin{aligned} G_{\sigma\sigma}(q) &= \frac{1 + \frac{\lambda_R}{6} I^F(q, M_G)}{D_\pi^{-1}(q)(1 + \frac{\lambda_R}{6} I^F(q, M_G)) + \frac{\lambda_R}{3} v^2}, \\ G_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}(q) &= -\frac{\lambda_R}{3} \frac{D_\pi^{-1}(q)}{D_\pi^{-1}(q)(1 + \frac{\lambda_R}{6} I^F(q, M_G)) + \frac{\lambda_R}{3} v^2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Ezt a jelenséget hívják *hibridizációnak*.

A σ részecske sajátenergiájának végtelen sor alakjában írása rávilágít a nagy N sorfejtés nem perturbatív renormalizációjának felösszegzési hátterére:

$$[G_{\sigma\sigma}(p)]^{-1} = p^2 + M_G^2 + \frac{\lambda_R}{3} v^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\lambda_R}{6} I^F(p, M_G) \right)^n. \quad (47)$$

Ezt a végtelen összeget a pionbuborékok végtelen sora adja a σ -propagátorba (1. ábra).



1. ábra. A σ -tér sajátenergiás járulékeinak Feynman-diagramjai. Az első két diagram a piontömeget meghatározó tadpole-járulékot, valamint a külső térrel arányos végtelen sor $n = 0$ tagját ábrázolja, a továbbiak a végtelen összeg $n > 0$ indexű tagjait képviselik. (A [13]-ban közölt ábrán Φ -vel jelöltük a v kondenzátumot)

Gerjesztési spektrum

A pszeudo-Goldstone-pionok explicit szimmetriasértéssel generált tömegét a mérésekből származó bemenő paraméterként kezelik. A kondenzátum nagyságát a pion gyenge bomlási állandójának kísérleti értékével kapcsolják össze: $v_0 \sqrt{N} = f_\pi$. Az explicit szimmetriasértés erősségére ezzel

a $h = m_{G0}^2 f_\pi / \sqrt{N}$ kifejezés kapható. A reális világra $N = 4$. Ezekkel az adatokkal kifejezve a renormalizált elmélet tömegparaméterét a tadpole-integrál explicit kifejezésével, a következő összefüggés adódik [12]:

$$m_R^2 = -\frac{\lambda_R}{6N} f_\pi^2 + m_{G0}^2 \left(1 - \frac{\lambda_R}{96\pi^2} \ln \frac{m_{G0}^2}{M_0^2} \right). \quad (48)$$

Ez az egyenlet a σ gerjesztés tömegét meghatározó (52) kifejezéssel együtt renormalizációs invarianciát mutat. Ez a kijelentés azt jelenti, hogy az M_0 renormalizációs skála megváltoztatásakor lehetséges olyan új $\lambda_R(M_0), m_R^2(M_0)$ választás, amely ugyanezeket a megoldásokat adja. A királis határesetben λ_R változása m_R^2 hangolását igényli.

Ugyanakkor, ha a σ tömegét adott (λ_R, m_R^2) pontban meghatározzuk $m_{G0} \neq 0$ -ra és a királis határesetben is, akkor a fenti egyenletből látszik, hogy két különböző fizikai megoldást csak különböző M_0 választással adhat. Ez persze más σ -tömeget is eredményez, amint az a 2. ábrán alább látható is.

A (46) képletek Minkowski-metrikára átfolytatott alakjában a nevező eltűnése határozza meg a skalárszektorban fellépő gerjesztések tömegét. Az euklidészi képletek visszafolytatása után az

$$iG_{\sigma\sigma}^{-1}(p_0) = p_0^2 - m_{G0}^2 - \frac{\lambda_R}{3N} f_\pi^2 \frac{1}{1 - \frac{\lambda_R}{6} I^F(p_0, m_{G0})} = 0 \quad (49)$$

egyenlet gyöke adja a keresett tömeget [13]. A gyök kereséséhez szükség van a véges buborékintegrál $T = 0$ -n érvényes, analitikusan megadható kifejezésére, amit a $p_0 > 2m_{G0}$ kétrészecskes bomlási küszöb felett kell használni:

$$I^F(p_0, m_{G0}) = \frac{1}{16\pi^2} \left[\ln \frac{m_{G0}^2}{M_0^2} - \sqrt{1-x} \ln \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+x} \right], \quad x = \frac{m_{G0}^2}{p_0^2}. \quad (50)$$

Ennek a kifejezésnek véges királis határértéke van:

$$I^F(p_0, 0) = \frac{1}{16\pi^2} \ln \frac{-p_0^2}{M_0^2}. \quad (51)$$

A gyökök komplexek. A fizikai σ -pólus m_σ tömegét és Γ_σ szélességét az egyszerűsített alakú egyenlet megoldásával az $m_{G0} = 0$ királis határesetben a

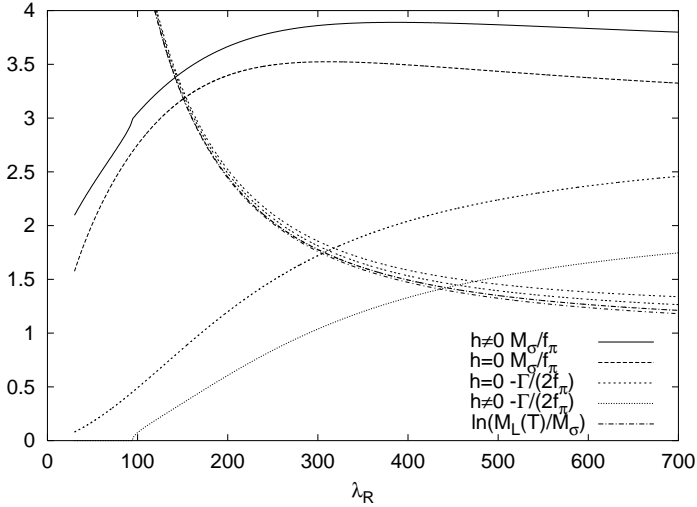
$$p_0 = M_0 e^{-i\varphi_0}, \quad m_\sigma = M_0 \cos \varphi_0, \quad \Gamma_\sigma = M_0 \sin \varphi_0 \quad (52)$$

alakban kerestük. (A komplex gyök a második Riemann-levélen helyezkedik el a $0 < \varphi_0 < \pi/2$ megkötés teljesülését megkövetelve.) Ezzel a paraméterezéssel a komplex egyenlet gyöke M_0/f_π -t és φ_0 -t határozza meg λ_R adott értékére. Véges piontömeg esetén

$$p_0 = 2m_{G0} + \bar{M}_0 e^{-i\bar{\varphi}_0} \quad (53)$$

parametrizációval kerestük a gyököket, ahol $\bar{M}_0, \bar{\varphi}_0$ -ból egyszerű geometriai megfontolással kifejezhető M_0 és φ_0 , majd ezekből M_σ, Γ_σ . A 2. ábrán megadjuk ezen mennyiségek változását λ_R -rel a királis limeszben és a fizikai piontömeg választása esetén is. Megjegyzendő, hogy a megfelelő görbéken ugyanazon bemenő renormalizált paraméterek mellett a fentebb elmondottak szerint más M_0 -t kell használni.

Az egyenletnek van egy nevezetes nem fizikai gyöke, amely tisztán imaginárius: $p_0 = iM_L$. A tachionikus *Landau-pólus* energiaskálája felső korlátot ad az elmélet használhatóságára. A 2. ábrán $\ln(M_L/m_\sigma)$ görbéje is látható. (Valójában nem nulla hőmérséklet esetén M_L enyhén függ a hőmérséklettől, ezért az ábrán inkább egy sáv, mintsem egyetlen görbe látható.) Szubjektív választással a hányados alsó értékét 4-5-nek választva, szeparálhatjuk a fizikai tartományt a Landau-skálától. Ez λ_R -re felső korlátot ad.



2. ábra. A σ -propagátor komplex pólusának valós (M_σ) és képzes (Γ_σ) része $T = 0$ hőmérsékleten a királis határesetben, illetve a kísérleti piontömegre vezetett explicit szimmetriasértésre. A tisztán imaginárius Landau-pólus (iM_L) erősségét is mutatjuk M_σ arányában, amely felülről korlátozza λ_R lehetséges értékeit. (A [12] közleményből)

Kiterjesztés a kvark-mezon elméletre [15]

A nem nulla barionszámmal jellemezhető szabadsági fokokat a modern elméletben kvarkokkal jelenítik meg. Ezért a (24)-t kiegészítő fermionszektor Lagrange-sűrűségét (4) helyett a kvarkokkal írjuk fel (euklidészi metrikában), mégpedig úgy, hogy a pionok Yukawa-csatolását is bevezetjük:

$$L_Q = \bar{q}(x) \left[\gamma_m \partial_m + \frac{g}{\sqrt{N}} \left(\sigma(x) + i\gamma_5 \sqrt{2N_f} T^a \pi^a(x) \right) \right] q(x). \quad (54)$$

Itt $q(x)$ az u és d kvarkokból álló izodublett vektor kiterjesztése N_f -dimenzióssá, $N = N_f^2 - 1$ pedig az $SU(N_f)$ csoport generátorainak a száma. Minden kvarkkomponens N_c színdegenerációt mutat, amit a kvarkterekre vett spúrképzésnél szorzóként kell figyelembe venni. A Yukawa-

kölcsönhatás fermion- σ csatolását N olyan hatványával skálázzuk, hogy a királis szimmetria spontán sérüléséből származó konsztituens kvarktömeg a nagy N határesetben véges legyen. A konsztituens tömeget megkülönböztetik a Lagrange-sűrűség paramétereként szereplőtől [18]. Az előbbit a nukleontömeg harmadára szokás beállítani, míg az explicit királis szimmetria sérülését jellemző m_q értéke a nem ritka kvarkokra 4–7 MeV. Ez világossá teszi, hogy a spontán szimmetriasértés hatása dominál. Alább feltételezzük, hogy a teljes kvarktömeg a királis szimmetria spontán sérüléséből származik:

$$m_Q = gv. \quad (55)$$

A kvarkterekre a funkcionális integrálás elvégezhető, amelynek az eredménye módosítja a mezonhatás S_M hatásfüggvényét:

$$\Delta S_M = -N_c \text{Tr} \log \left[\gamma_m \partial_m + \frac{g}{\sqrt{N}} \left(\sigma(x) + i\gamma_5 \sqrt{2N_f} T^a \pi^a(x) \right) \right]. \quad (56)$$

E kifejezés megfelelő funkcionális deriváltjai, a ($\sigma = \sqrt{N}v$, $\pi = 0$) helyen számítva, egészítik ki a pion- és σ -propagátorok kifejezéseit. A kiegészített (26) állapotegyenletbe a Yukawa-csatolás révén a kvarkpropagátorral számolt tadpole-integrál is járulékot ad:

$$\sqrt{N}v \left[m^2 + \frac{\lambda}{6}v^2 + \frac{\lambda}{6N} (\langle \sigma^2 \rangle + \langle \pi^i \pi^i \rangle) - \frac{h}{v} \right] - \frac{gN_c N_f}{\sqrt{N}} \text{Tr} (\gamma_m \partial_m + m_Q)^{-1} = 0. \quad (57)$$

Ez a járulék $1/\sqrt{N}$ -nel el van nyomva a vezető járulékhhoz képest, de a nagy N sorfejtésben megelőzi a mezonikus járulék következő $\mathcal{O}(1/N)$ rendjét. Nulla hőmérsékleten a kvarktadpole alakilag azonos a bozonikussal, leszámítva azt a szabadságot, amely megengedi a fermionikus normalizációs skálára a bozonikus M_{0B} -től eltérő érték választását:

$$\text{Tr} (\gamma_m \partial_m + m_Q)^{-1} = 4m_Q T(m_Q). \quad (58)$$

Később megmutatjuk, itt csak figyelmeztetünk, hogy véges hőmérsékleten a kvarkok és a mezonok tadpole-integrálja lényegesen eltérő alakú.

A pion sajátenergiájához a kvarkbuborék ad kiegészítést, amely alkalmasan átalakítható az izospin-generátorok $\text{tr} T^a T^b = \delta^{ab}/2$ normalizációját, majd a Dirac-algebrát kihasználva:

$$\begin{aligned}
G_\pi^{-1}(k) &= Z_\pi k^2 + m^2 + \frac{\lambda}{6} \left(v^2 + \int_q G_\pi(q) \right) \\
&\quad - \frac{g^2 N_f N_c}{N} \int_q \text{tr}_D D_F(q) \gamma_5 D_F(q+k) \gamma_5 \\
&= Z_\pi k^2 + m^2 + \frac{\lambda}{6} (v^2 + T(M_G)) \\
&\quad - \frac{4g^2 N_f N_c}{N} \left[T(m_Q) - \frac{1}{2} k^2 I(k, m_Q) \right], \tag{59}
\end{aligned}$$

ahol $D_F(q)$ a szabad, m_Q tömegű Dirac-propagátor, $I(m_Q)$ nulla hőmérsékleten a bozonikus integrállal azonos buborékintegrál, amelyet az m_Q kvark-tömeggel kell kiszámítani. Miután a kvarkbuborék járuléka impulzusfüggő divergenciát hoz be, be kellett vezetni a Z_π hullámfüggvény renormalizációs állandót. A renormalizált állapotegyenletet a pionpropagátorral összehasonlítva kapjuk meg a Goldstone-bozon tömegének a kvark-mezon elméletben érvényes kifejezését:

$$M_G^2 = \frac{h}{v}. \tag{60}$$

Az állapotegyenlet renormalizációjához a csatolások $\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$ nagyságrendű ellencsatolások módosulását várjuk (erre a körülményre az 1/2 index használatával utalunk). A végtelen (37) ellentag-felösszegzést v^2 együtt-hatója esetében ki kell egészíteni egy $\sim g^4$ taggal, miközben $T^F(M_G)$, illetve M_G^2 együtt-hatója továbbra is (37) és (38) szerint renormalizálódik. A későbbiek szempontjából fontos annak kiemelése, hogy arról az ellentagról van

szó, amelyek a potenciálban a v^4 -nel arányos tag csatolását határozza meg. Ugyanez az ellentag végesíti a pionpropagátorban a v^2 -tel arányos csatolást, azaz $\lambda_{v^2\pi\pi}$ -t. Az ellencsatolások képletei:

$$\delta m_{1/2}^2 = \frac{4g^2 N_c N_f}{N} (T_d^{(2)} + M_{0F}^2 T_d^{(0)}), \quad \delta \lambda_{v^4}^{(1/2)} = \delta \lambda_{v^2\pi\pi}^{(1/2)} = -\frac{24g^4 N_c N_f}{N} T_d^{(0)}. \quad (61)$$

A pionpropagátor inverze k^2 -tel arányos részének renormalizációját, a $Z_\pi = 1 + \delta Z_{\pi,1/2}$ felbontást használva, a

$$\delta Z_{\pi,1/2} = -\frac{2g^2 N_c N_f}{N} T_d^{(0)} \quad (62)$$

választással érjük el.

A véges $\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$ pontosságú egyenletek a következők:

$$\begin{aligned} M_G^2 &= m_R^2 + \frac{\lambda}{6} (v_R^2 + T^F(M_G)) - \frac{4g^2 N_c N_f}{N} T^F(m_Q), \\ G_\pi^{-1}(k) &= k^2 \left(1 - \frac{2g^2 N_c N_f}{N} I^F(k, m_Q) \right) + M_G^2. \end{aligned} \quad (63)$$

A σ -tér propagátorához adott kvarkbuborék-járulék figyelembevétele a következő inverz propagátor-mátrixra vezet a segédterez formalizmus $\alpha - \sigma$ szektorában, a piontérré történt integrálás után:

$$\mathcal{G}^{-1}(q) = \begin{pmatrix} -\frac{3N}{\lambda} - \frac{N}{2} I_\pi^F(q) & \sqrt{N}v \\ \sqrt{N}v & G_\pi^{-1}(q) + \frac{8g^4 N_c N_f}{N} v^2 I^F(q, m_Q) \end{pmatrix}, \quad (64)$$

ahol $I_\pi^F(q)$ a kvarkbuborékkal módosított G_π pionpropagátorral számolt, renormalizált pionbuborék. Renormalizációjának alaposabb bemutatása bonyolultabb (és nehezebben áttekinthető) megfontolást igényelne, ezért közeleltető tárgyalására az eredeti M_G tömegű egyszerű pólusnak megfelelő propagátort használjuk az $\alpha\alpha$ mátrixelem I_π^F mennyiségében. A $\sigma\sigma$ mátrixelem

renormalizációja a $Z_\sigma = Z_\pi$ ellentag mellett a $\lambda_{v^2\sigma\sigma}$ csatoláshoz igényel ön-álló ellentagcsatolást:

$$\delta\lambda_{v^2\sigma\sigma}^{(1/2)} = -\frac{72g^4N_cN_f}{N}T_d^{(0)}. \quad (65)$$

A $\delta\lambda_{v^2\sigma\sigma} \neq \delta\lambda_{v^2\pi\pi}$ eltérés nem váratlan, hiszen a Yukawa-csatolás sérti a (σ, π^a) terek belső $O(N)$ szimmetriáját. A σ -tér propagátorának reciprokára ebből a mátrixból

$$[G_{\sigma\sigma}(q)]^{-1} = G_\pi^{-1}(q) + \frac{8g^4N_cN_f}{N}v^2I^F(q, m_Q) + \frac{\lambda}{3}v^2\frac{1}{1 + \frac{\lambda}{6}I^F(q, M_G)} \quad (66)$$

adódik [15].

A propagátort Minkowski-téridőre folytatva találjuk meg a gerjesztési spektrumot. Az elfolytatás „szabályai”:

$$G_{\sigma\sigma}^{-1} \rightarrow -iG_{\sigma\sigma}^{-1}, \quad p^2 \rightarrow -p^2, \quad I^F(q, M) \rightarrow -I^F(q, M), \quad (67)$$

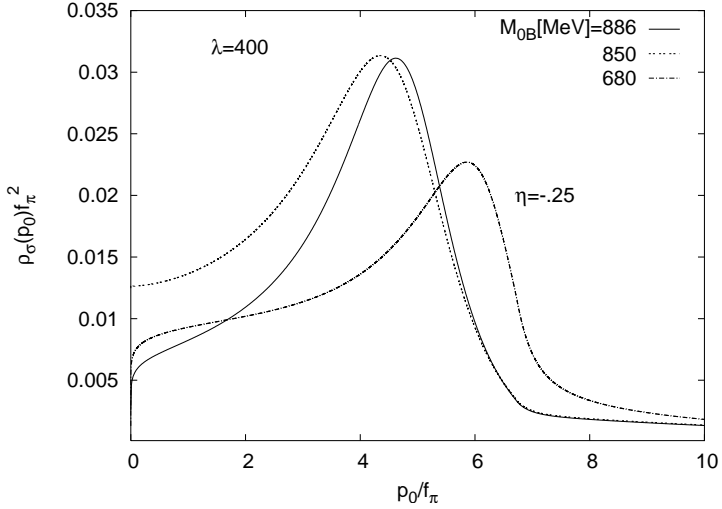
ahol az euklidészi metrikájúak a bal, míg a Minkowski-metrikával számolt mennyiségek a nyílak jobb oldalán állnak. Az átfolytatott σ -propagátor ennek alapján:

$$iG_{\sigma\sigma}^{-1}(q) = iG_\pi^{-1}(q) - \frac{\lambda}{3}v^2\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{6}I^F(q, M_G)} + \frac{8g^4N_cN_f}{N}v^2I^F(q, m_Q), \quad (68)$$

ahol megint szükség van a buborékintegrál (50)-ben megadott explicit alakjára.

A buborékintegrál értelmezése kiterjeszthető a $\text{Im } q_0 > 0$ tartományra. A gerjesztések jellemzésére a spektrális függvény használható, amelyet a $\mathbf{q} = 0, q_0 = \omega + i\epsilon$ rendszerben az alábbi szabállyal lehet kiszámítani:

$$\rho_\sigma(\omega) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} [iG_{\sigma\sigma}(\omega + i\epsilon, 0)]. \quad (69)$$



3. ábra. A σ -gerjesztés spektrálfüggvénye $T = 0$ hőmérsékleten a kvark-mezon elméletben, az M_{0B} és M_{0F} normalizációs pontok három különböző értékpárjára, az η viszonyszám rögzített értéke mellett. (A [15] közleményből)

A 3. ábrán látható, hogy egy aszimmetrikus kiszélesedésű és elég elnyúlt függvény adódik, amelyet nem lehet egy olyan határozott nyugalmi energiájú gerjesztéssel azonosítani, amelyhez Dirac-delta spektrális függvény tartozna. A spektrálfüggvény részletei függenek a választott normalizációs skáláktól (M_{0B} , M_{0F}). Az ábrán $\eta = \ln(M_{0B}/M_{0F}) = -0,25$ rögzített értéke mellett M_{0B} három értékére ábrázoltuk a spektrálfüggvényt. A maximum helyzete elég jól egybevág a Particle Data Group által elfogadott tömegtartománnyal, de a szélessége nagyjából fele a σ részecske jelenlegi kísérleti adatainak.

KIRÁLIS SZIMMETRIA HELYREÁLLÁSA VÉGES HŐMÉRSEKLETEN ÉS SŰRŰSÉGEN

Véges T hőmérsékleten a (36) állapotegyenletet a piontadpole véges hőmérsékletű részével egészítjük ki:

$$M_G^2(T) = m_R^2 + \frac{\lambda_R}{6} v^2(T) + \frac{\lambda_R}{96\pi^2} M_G^2(T) \ln \frac{M_G^2(T)e}{M_0^2} + \frac{\lambda_R T^2}{12\pi} \int_{M_G(T)/T}^{\infty} dy (e^y - 1)^{-1} (y^2 - M_G^2(T)/T^2)^{1/2}. \quad (70)$$

A renormalizált λ_R csatolást és az M_0 renormalizációs skálát $T = 0$ -n rögzítve, bevezetve a dimenziótlan $\mu(T) = M_G(T)/M_G(0)$ és a $\tau = T/M_G(0)$ mennyiségeket (aminek persze csak explicit szimmetriasértés esetén van értelme), képezhető az állapotegyenlet $T \neq 0$ és $T = 0$ esetre érvényes alakjainak különbsége:

$$\mu^2 - 1 = \frac{\lambda_R \tau^2}{12\pi} \int_{\mu/\tau}^{\infty} dy (e^y - 1)^{-1} (y^2 - \mu^2/\tau^2)^{1/2} + \frac{\lambda_R v_0^2}{6M_G^2(0)} \left(\frac{1}{\mu^4} - 1 \right) + \frac{\lambda_R}{96\pi^2} \left[(\mu^2 - 1) \ln \frac{M_G^2(0)e}{M_0^2} + \mu^2 \ln \mu^2 \right]. \quad (71)$$

Ebben a képletben fenomenológiai információként használható a pion tömege ($M_G(0)$) és gyenge bomlási állandója $f_\pi = \sqrt{N} v_0 = 2v_0$. Tehát ezzel az egyenlettel meghatározható $\mu(\tau)$, azaz a Goldstone-bozon tömegének hőmérsékletfüggése.

A Goldstone-tömeg folyamatosan növekszik a hőmérséklet minden határon túli növelésével. A királis határesetben ($M_G(T) = 0$ a sértett fázisban) viszont az átskálázatlan egyenletből az integrál elvégzésével egyszerű egyenletet kapunk, amely szerint a $v(T) \neq 0$ megoldás már véges T_c hőmér-

sékleten folytonosan eltűnik. A királis esetre a

$$\frac{v^2(T)}{v_0^2} = \left(1 - \frac{T^2}{12v_0^2}\right) \rightarrow T_c^2 = 12v_0^2 \quad (72)$$

egyenletet kapjuk. A T_c felett csak a $v(T) = 0$ megoldás marad meg, tehát másodrendű fázisátalakulás zajlik le, ahol a jelen tárgyalás a rendparaméternek átlagtérjellegű hatványfüggést követő nullához tartását eredményezi.

A σ -csatorna spektrális függvényének hőmérsékletfüggését a $G_{\sigma\sigma}$ -propagátor hőmérsékleti korrekciójával lehet követni. Az egyszerűség kedvéért a $h = 0$ esetet tanulmányozzuk:

$$iG_{\sigma\sigma}^{-1}(p_0, T) = p_0^2 - \frac{\lambda_R}{3} v^2(T) \frac{1}{1 - \frac{\lambda_R}{6} I^F(p_0, M_G = 0, T)}, \quad (73)$$

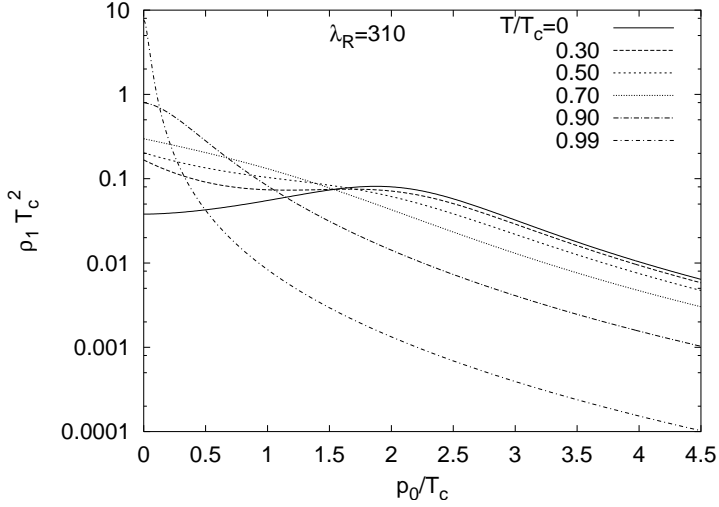
ahol a pionbuborék már korábban szerepelt (vö. (51)) nulla hőmérsékletű kifejezését a fizikai p_0 -tartományban definiált

$$\begin{aligned} I^F(p_0, M_G = 0, T) &= I^F(p_0, M_G = 0, T = 0) \\ &+ \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega_1\omega_2} \left\{ (n_1 + n_2) \left[\frac{1}{p_0 - \omega_1 - \omega_2 + i\epsilon} - \frac{1}{p_0 + \omega_1 + \omega_2 + i\epsilon} \right] \right. \\ &\left. - (n_1 - n_2) \left[\frac{1}{p_0 - \omega_1 + \omega_2 + i\epsilon} - \frac{1}{p_0 + \omega_1 - \omega_2 + i\epsilon} \right] \right\} \end{aligned} \quad (74)$$

kifejezéssé egészítjük ki (n_i a megfelelő energiaértéknél kiszámolt Bose-Einstein-eloszlást jelenti), továbbá $\omega_1 = |\mathbf{q}|$, $\omega_2 = |\mathbf{q} + \mathbf{p}|$. A 4. ábrán a (69) definícióval a (73) alapján és (74) felhasználásával számolt spektrálfüggvény hőmérsékletfüggését érzékeltető görbesor látható.

Milyen változást hoz a kvarkbuborék és a véges bariokémiai potenciál figyelembevétele?

Először a kémiai potenciált nullának tekintjük. A fermiontadpole véges hőmérsékletű kiegészítése ellenkező előjelű a (70) képlet jobb oldalán megje-



4. ábra. A σ -gerjesztés módosított spektrálfüggvényének hőmérsékletfüggése a királis határesetben ($\rho_1 = (1 - \exp(-p_0/2T))\rho_\sigma(p_0, T)$), a [12] közleményből)

lenő bozonjárulékhoz képest, továbbá Bose–Einstein-eloszlás helyett Fermi–Dirac-eloszlásfüggvény szerepel benne:

$$T^F(M_Q, T, M_{0F}) = T^F(M_Q, 0, M_{0F}) - \frac{T^2}{2\pi^2} \int_{M_Q/T}^{\infty} dy (e^y + 1)^{-1} (y^2 - M_Q^2(T)/T^2)^{1/2}. \quad (75)$$

A királis határesetben ($M_G = 0$) a sértett szimmetriájú tartomány határán $v = 0$ írható, amellyel persze $m_Q = 0$ is fennáll. Ezzel a kritikus hőmérséklet egyenlete:

$$m_R^2 + \frac{\lambda_R}{6} \frac{T_c^2}{12} + \frac{g^2 N_c T_c^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} dy y (e^y + 1)^{-1} = 0, \quad (76)$$

amelyből az integrál elvégzése után T_c egyenlete a következő:

$$m_R^2 + \left(\frac{\lambda_R}{6} + g^2 N_c \right) \frac{T_c^2}{12} = 0. \quad (77)$$

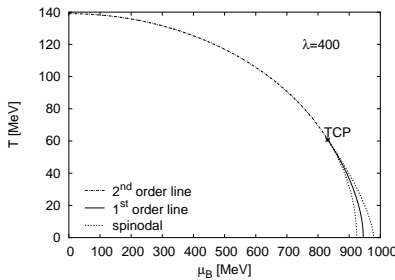
Véges kémiai potenciál esetén a (76) egyenlet bal oldalának integráljában megjelenik a $z = e^{\mu/T}$ fugacitás, minthogy az $(e^y + 1)^{-1} \rightarrow [(ze^y + 1)^{-1} + (e^y/z + 1)^{-1}]/2$ cserét kell elvégezni. A Fermi–Dirac-integrálások az integrandus z hatványai szerinti sorfejtésével felcserélve végzendők el, amelynek eredménye a kritikus pont meghatározásában a következő:

$$m_R^2 + \frac{\lambda_R}{72} T_c^2 - \frac{g^2 T_c^2 N_c}{2\pi^2} [\text{Li}_2(-z) + \text{Li}_2(-1/z)] = 0, \quad (78)$$

ahol Li_2 az $l = 2$ indexű polilogaritmus függvény. Ebből a $T_c(\mu)$ függvény határozható meg, miután a renormalizált csatolások értékét rögzítettük. Ez egy kritikus vonal, amely ott ér véget, ahol az effektív potenciál $\sim v^4$ tagjának együttthatója előjelet vált. Ez az állapotegyenletben a v^2 -tel arányos tag, amelynek meghatározását követően annak eltűnése feltételéből megkapható a trikritikus pont hőmérséklete:

$$\frac{\lambda_R}{6} + \frac{g^4 N_c}{4\pi^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial n} (\text{Li}_n(-z) + \text{Li}_n(-1/z)) \right) \Big|_{n=0} - \ln \frac{\text{const.} \times T_{TCP}}{M_0 B} \right] = 0. \quad (79)$$

Az 5. ábrán a $T - \mu$ síkban ábrázoljuk a TCP-ben végződő kritikus vonalat, amely $\mu > \mu_{TCP}$ -re elsőrendű átalakulási vonalban folytatódik.



5. ábra. A $T - \mu$ síkbeli fázisdiagram ($M_{0B} = 886$ MeV, $\eta = 0$). A trikritikus ponttól (TCP) balra másodrendű fázisátalakulási vonal választja el a sértett királis szimetriájú fázist (a görbe alatt) a helyreállt királis szimetriájától (a görbe felett). (A [15] közleményből)

A PERTURBÁCIÓSZÁMÍTÁS OPTIMALIZÁCIÓJA ÉS ALKALMAZÁSAI

A perturbatív sorok konvergenciájának sebességét az egymást követő tagok amplitúdójának relatív nagysága alapján becsülik meg. Ez adta az ötletet, hogy a soron következő korrekció nagyságát, a renormalizálási feltétellel megválasztásának szabadságával élve, minimalizálják, azaz a kiválasztott mennyiségre a lehető legjobban felgyorsítsák a perturbációs becslés látszólagos konvergenciáját [21, 22, 23].

Az alapgondolat egyszerű. A (17) modell tömegtagjába egy variációsán meghatározandó tömeget vezetnek be az eredeti μ^2 paraméter helyett:

$$\begin{aligned} L_{mass} = & -\frac{1}{4}m^2\text{tr}M^\dagger M + \frac{1}{4}(-\mu^2 + m^2)\text{tr}M^\dagger M \equiv \\ & -\frac{1}{4}m^2\text{tr}M^\dagger M + \frac{1}{2}\Delta m^2\text{tr}M^\dagger M. \end{aligned} \quad (80)$$

A perturbációs számításban a skalárterek propagátoraiban az $m^2 > 0$ mennyiséget használják, míg a Δm^2 -tel arányos járulékokat ellentagként kezelik. Ennek az is előnye, hogy a sértett szimmetriájú fázisban a $\mu^2 < 0$ (rossz előjelű) tömegparaméterrel konstruált propagátorok az impulzusok bizonyos tartományában tachionikus természetűvé válnak, ami a módosított tömegtaggal elkerülhető. m^2 meghatározására általában azt szokás előírni, hogy valamelyik tér propagátorában szereplő tömeg ne kapjon korrekciót a klasszikus Lagrange-sűrűségből kiolvasható kifejezéséhez a perturbációs számítás első rendjében. Ez a választott mennyiségre éppen a *leggyorsabb látszólagos konvergenciát* (LLK) biztosító követelmény. Ugyanakkor világos, hogy a konvergencia felgyorsítása nem vonatkozhat univerzálisan az összes fizikai mennyiségre.

Optimalizált perturbációszámítás az $SU(3)_L \times SU(3)_R$ mezonmodellben

Alább a királis mezonmátrix modellben $N_f = 3$ kvarkfajta esetére mutatom be az optimális perturbációszámítás (OPT) alkalmazását az erősen kölcsönható részek termodinamikai jellemzőinek kiszámítására. Szép Zsolt és Herpay Tamás [24] munkájára támaszkodom, amely továbbfejlesztette korábbi közös munkánkat [25]. Szép Zsolt és Kovács Péter 2007-ben kiterjesztették az OPT-t alkalmazó tárgyalást az $N_f = 3$ kvark-mezon modell véges kémiai potenciál melletti termodinamikájára [26].

A háromféle kvarkot tartalmazó elmélet Lagrange-sűrűsége a két kvark-ízt tartalmazóhoz képest két független negyedfokú $U(3)_L \times U(3)_R$ invariánst tartalmaz, továbbá szerepel benne a szimmetriát $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -ra redukáló köbös tag a mezonmátrix determinánsának alakjában. Az ún. 't Hooft-determinánst [27] az $U_A(1)$ szimmetriát sértő kvantumanomália erősségével meghatározott g csatolás nagysága jellemzi. A nem ritka kondenzátum mellett fellép ritka mezonkondenzátum is, ezért kétféle explicit szimmetriasértő tagot vezetnek be. Mindezekkel a kiegészítésekkel a Lagrange-sűrűségre Chan és Haymaker 1973-ban a következő kifejezést javasolta [28]:

$$\begin{aligned} L(M) = & \frac{1}{2} \text{tr}(\partial_\mu M^\dagger \partial^\mu M - \mu^2 M^\dagger M) - f_1 (\text{tr}(M^\dagger M))^2 - f_2 \text{tr}(M^\dagger M)^2 \\ & - g (\det(M) + \det(M^\dagger)) + \epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y, \end{aligned} \quad (81)$$

ahol a mezonmátrixot a Gell-Mann-mátrixokkal és az $U(3)$ csoport egység-mátrixszal arányos kilencedik λ_0 generátorával feszítik ki. A $0 - 8$ „síkban” ortogonális transzformációval azonban áttérnek a „ritka (y) nem ritka (x)” bázisra, amelyben változatlan $\lambda_1 - \lambda_7$ Gell-Mann-mátrixokkal a mezonmátrix

a következő explicit paraméterezéssel adható meg:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^7 (\sigma_i + i\pi_i) \lambda_i + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{diag}(\sigma_x + i\pi_x, \sigma_x + i\pi_x, \sqrt{2}(\sigma_y + i\pi_y)). \quad (82)$$

Az elmélet nyolc paramétere úgy határozható meg, hogy az 1-hurok-szinten kiszámított fizikai mennyiségeket fenomenológiai értékeikkel teszik egyenlővé. Látni fogjuk, hogy az LLK követelményének évényesítése a szóban forgó mennyiségekre önálló egyenlet(ek)re vezet.

A pion- és a kaonpropagátorok inverzei a megfelelő sajátenergia-függvényekkel a következő alakúak:

$$\begin{aligned} iD_\pi(p)^{-1} &= Z_\pi(p^2 - m_\pi^2 - \Sigma_\pi(p^2, m_i, \kappa)), \\ iD_K(p)^{-1} &= Z_K(p^2 - m_K^2 - \Sigma_K(p^2, m_i, \kappa)), \end{aligned} \quad (83)$$

ahol a sajátenergiákat $Z_\pi \Sigma_\pi$, illetve $Z_K \Sigma_K$ adja. m_π^2, m_K^2 a fagrafszintű tömegnégyzetek, amelyeket $\langle \sigma_x \rangle = x, \langle \sigma_y \rangle = y$ kondenzátumok feltételezésével számolunk ki. Ezek a mennyiségek a p^2 impulzustól, a hurokban előforduló összes mezon m_i tömegétől, valamint a hurokdiagramok renormalizációja során bevezetett κ renormalizációs impulzusskálától függenek. A Σ_π és Σ_K mennyiségeket közelítőleg a

$$\begin{aligned} \Sigma_\pi(p^2, m_i, \kappa) &\approx \Sigma_\pi(m_\pi^2, m_i, \kappa) + \left. \frac{\partial \Sigma_\pi}{\partial p^2} \right|_{m_\pi^2} (p^2 - m_\pi^2), \\ \Sigma_K(p^2, m_i, \kappa) &\approx \Sigma_K(m_K^2, m_i, \kappa) + \left. \frac{\partial \Sigma_K}{\partial p^2} \right|_{m_K^2} (p^2 - m_K^2) \end{aligned} \quad (84)$$

kifejtéssel reprezentálva a propagátorok inverzei, miután a hullámfüggvény renormalizációs állandókat a

$$Z_\pi^{-1} = 1 - \left. \frac{\partial \Sigma_\pi}{\partial p^2} \right|_{m_\pi^2}, \quad Z_K^{-1} = 1 - \left. \frac{\partial \Sigma_K}{\partial p^2} \right|_{m_K^2} \quad (85)$$

(számításaink szintjén véges [!]) kifejezésekkel azonosítjuk, a következő kifejezésekbe mennek át:

$$\begin{aligned} iD_\pi(p)^{-1} &= p^2 - m_\pi^2 - Z_\pi \Sigma_\pi(m_\pi^2, m_i, \kappa), \\ iD_K(p)^{-1} &= p^2 - m_K^2 - Z_K \Sigma_K(m_K^2, m_i, \kappa). \end{aligned} \quad (86)$$

Azt a követelményt állítjuk, hogy a pionnak és a kaonnak a fenomenológiai tömegeit már a fagráfszintű kifejezésük megadja, és az 1-hurok-korrekciók (lásd 6. ábra első két sorát) járuléka legyen nulla. Ez 4 (!) egyenletet jelent:

$$\begin{aligned} M_\pi^2 &= m_\pi^2 = m^2 + 2(2f_1 + f_2)x^2 + 4f_1y^2 + 2gy, \\ M_K^2 &= m_K^2 = m^2 + 2(2f_1 + f_2)(x^2 + y^2) + 2f_2y^2 - \sqrt{2}x(2f_2y - g), \\ 0 &= \Sigma_\pi(m_\pi^2, m_i, \kappa) = \Sigma_K(m_K^2, m_i, \kappa). \end{aligned} \quad (87)$$

A 6. ábra alapján szeparáljuk a sajátenergia kifejezésében a szigorúan 1-hurok- és az „ellentag”-jellegű járulékokat. Ekkor az előző egyenlet sor utolsó két darabja kicsit részletesebben írható:

$$\begin{aligned} Z_\pi \Sigma_\pi(m_\pi^2, m_i, \kappa) &= Z_\pi \Sigma_\pi^{(1-loop)}(m_\pi^2, m_i, \kappa) - m^2 + \mu^2 = 0, \\ Z_K \Sigma_K(m_K^2, m_i, \kappa) &= Z_K \Sigma_K^{(1-loop)}(m_K^2, m_i, \kappa) - m^2 + \mu^2 = 0. \end{aligned} \quad (88)$$

Ezzel a pion és a kaon tömegére vonatkozó gapegyenleteket kapunk (felhasználva m^2 -nek az első két egyenletből adódó alakját):

$$\begin{aligned} m_K^2 &= \mu^2 + 2(2f_1 + f_2)(x^2 + y^2) + 2f_2y^2 \\ &\quad - \sqrt{2}x(2f_2y - g) + Z_K \Sigma_K^{(1-loop)}(m_K^2, m_i, \kappa), \\ m_\pi^2 &= \mu^2 + 2(2f_1 + f_2)x^2 + 4f_1y^2 + 2gy + Z_\pi \Sigma_\pi^{(1-loop)}(m_\pi^2, m_i, \kappa). \end{aligned} \quad (89)$$

A többi mezon m_i tömege a belső vonalak propagátoraiiban a megfelelő fagráfszintű kifejezésekkel adott. A pion/kaon tömegének kifejezését

6. ábra. A pion-, a kaon- és az η terek sajátenergiájába 1-hurok-szinten járulékat adó Feynman-diagrammok. A belső vonalokon a fagráf szintű tömegekkel terjednek a mezonok, a sávozott vertexes csomó az optimalizációból származó „ellentagjárulékok” jelöli. A [24] közleményből)

További két egyenletet szolgáltat a pion- és kaonszatórnabeli két Ward-azonosság. Az 1-pont- (x, y) függvényeket a $p = 0$ impulzusú 2-pont- $(D_\pi(0), D_K(0))$ függvényekkel összekötő azonosságok újfent azért biztosan érvényesek, mert a perturbációs számítással összhangban vannak, már az LLK követelményének kirovását megelőzve:

36 SZÉKFOGLALÓK A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁN

Továbbá kiróható a két PCAC-reláció is:

$$f_\pi m_\pi^2 = \sqrt{Z_\pi} \epsilon_x, \quad f_K m_K^2 = \sqrt{\frac{Z_K}{2}} \epsilon_y + \sqrt{Z_\pi} \epsilon_x. \quad (91)$$

Az m^2 „effektív” tömegparaméter bevezetésével immár 8+1 paramétert kell meghatározni. Ezért az η -mezon tömegére vonatkozó egyenletet is fel kell írni. Ez hosszú képletet eredményez, mivel az 1-hurok-szinten kiszámolt 2×2 -es $\eta - \eta'$ tömegmátrix kisebbik sajátértékét kell azonosítani a kísérleti tömeggel (lásd [24] (17) képletét!).

Zárásul érdemes megjegyezni, hogy az OPT-követelményből származó gapegyenletek m_π^2 -re, illetve m_K^2 -re teljesen hasonló struktúrájúak, mint a vezető nagy N közelítésben az $O(N)$ modellben M_G^2 -re kapott (36) egyenlet. Az eltérés csak az, hogy a sajátenergiában ott egyetlen tadpole-járulék lép fel, amit az $O(N)$ modell egyszerűbb csoportszerkezete, illetve a nagy N határeset indokol. Természetesen, a nagy N közelítés valamely véges rendjéhez hasonlóan, az LLK követelményével meghatározott egyenletrendszernek csak a csatolási tér egy részében van megoldása, azaz nem biztosított, hogy az (m_π, m_K, m_η) tömegek és (f_π, f_K) bomlási állandók fenomenológiai értékeit választva, létezik megoldásuk. Fenomenológiai alkalmazásnál így kell azzal a lehető legreálisabb bemenő paraméterválasztással dolgozni, amelyhez az egyenletek megoldásával sikeresen található fizikailag értelmes csatolási állandó együttes.

A termodinamikai kiterjesztés

A pion és a kaon tömegének hőmérsékletfüggését ismerve a (90) egyenletből megkapható a rendparaméterek T -függése. A kérdéses tömegeket véges hőmérsékleten is a (89) gapegyenletekből határozták meg, a véges hőmérsékletű sajátenergiák kifejezését használva. A $T = 0$ és a $T \neq 0$ járulékokat

szétválasztják:

$$\begin{aligned}\Sigma_M(p^2 = m_\pi^2, m_i, \kappa) &= \Sigma_M^{(T=0)}(p^2 = m_\pi^2, m_i, \kappa) + \Sigma_M^{(T)}(p^2 = m_\pi^2, m_i, \kappa), \\ M &= \pi, K,\end{aligned}\tag{92}$$

és azzal a közelítéssel élnek, hogy a sajátenergia $T \neq 0$ részét nem a tömeghéjon, hanem a $p_0 = 0$ pontban számolják. Ennek gyakorlatias előnye, hogy a különböző tömegű propagátorokkal definiált renormalizált buborékintegrál kifejezése renormalizált tadpole-integrálok kombinációjába megy át:

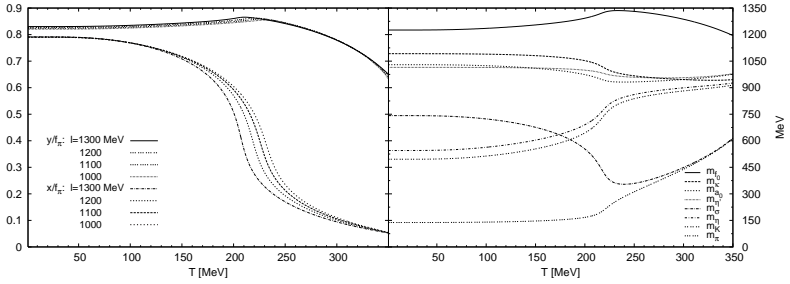
$$I^F(p = 0, m_1, m_2) = \frac{T^F(m_1, T) - T^F(m_2, T)}{m_2^2 - m_1^2}.\tag{93}$$

Ezért írható a gapegyenletekre ($M = \pi, K$):

$$\begin{aligned}m_\pi^2 &= \mu^2 + 2(2f_1 + f_2)x^2 + 4f_1y^2 + 2gy \\ &+ Z_\pi \Sigma_\pi^{(1-loop, T=0)}(m_\pi^2, m_i(m_\pi), \kappa) + \sum_{\alpha=\pi_i, \sigma_i} c_\alpha^\pi T^F(m_i(m_\pi), T \neq 0), \\ m_K^2 &= \mu^2 + 2(2f_1 + f_2)x^2 + 4f_1y^2 + 2gy - \sqrt{2}x(2f_2y - g) \\ &+ Z_K \Sigma_K^{(1-loop, T=0)}(m_K^2, m_i(m_K), \kappa) + \sum_{\alpha=\pi_i, \sigma_i} c_\alpha^K T^F(m_i(m_K), T \neq 0)\end{aligned}\tag{94}$$

expliciten meghatározható c_α^π, c_α^K együtthatókkal.

Miután ezeket az egyenleteket megoldottuk, ismerjük a rendparaméterek $x(T), y(T)$ hőmérsékletfüggését is. Ezek után az összes elemi tér tömegének hőmérsékleti változását is megadhatjuk például a fagráfszintű képleteikbe a hőmérsékletfüggő rendparamétereket, továbbá az optimalizáló tömegparamétert, $m^2(T)$ -t helyettesítve be. Utóbbi $m_\pi^2(T)$ (87)-ben megadott alakjából olvasható ki. A rendparaméterek és a mezontömegek hőmérsékletfüggése látható a 7. ábrán.



7. ábra. A nem ritka és a ritka kondenzátumoknak (bal oldal), továbbá a paritáspartner mezonpárok tömegeinek (jobb oldal) T -függése. A kondenzátumokat (1000, 1300) MeV tartományból vett renormalizációs skálákkal határozták meg, míg a tömegekre az 1200 MeV-es renormalizációs skálaérték választása melletti viselkedést mutatja be az ábra. (A [24] közleményből)

Kiterjesztés a kvark-mezon modellre

Az N_f kvarkot tartalmazó elmélet Yukawa-csatolásában már korábban használt a flavorszámmal való skálázást expliciten feltüntetető csatolást (lásd (54))

$N_f = 3$ esetére módosított formában használjuk a fentebb leírt bázisban:

$$\begin{aligned}
 L_Q &= \bar{q}(x) (\gamma_m \partial^m - g_F M_5) q(x), \\
 M_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^7 (\sigma_i + i\gamma_5 \pi_i) \lambda_i \\
 &+ \frac{1}{2} \text{diag} \left(\sigma_x + i\gamma_5 \pi_x, \sigma_x + i\gamma_5 \pi_x, \sqrt{2}(\sigma_y + i\gamma_5 \pi_y) \right). \quad (95)
 \end{aligned}$$

Ennek az effektív elméletnek 9 paramétere van: $\mu^2, f_1, f_2, g, g_F, \epsilon_x, \epsilon_y, x, y$. Továbbá a renormalizáció folyamatában fellép a bozonikus és a fermionikus renormalizációs skála: M_{0B}, M_{0F} . Az optimalizációt jellemző m^2 effektív tömegparamétert meghatározó gapegyenlet a tizedik. Ezeket a paramétereket $T = 0$ és zérus barionsűrűség ($\mu_B = 0$) mellett kell beállítani, és az ily módon teljesen meghatározott elméleti keretben lehet jóslatokat tenni az erős kölcsönhatás alapállapotának viselkedésére véges hőmérsékleten és véges barionsűrűségen.

A korábbi tapasztalatnak megfelelően σ_x és σ_y kondenzátuma tömeget generál a kvarkoknak:

$$M_u = M_d = \frac{g_F}{2} x, \quad M_s = \frac{g_F}{\sqrt{2}} y. \quad (96)$$

Ez a konsztituens kvarkokra vonatkozó $M_u = M_d = M_N/3$ és $M_s = (M_\Lambda + M_\Sigma)/2 - 2M_u$ összefüggéseket használva 2 összefüggést ad x, y és g_F között. A harmadikat a pion gyenge bomlására érvényes faszintű PCAC-reláció: $x = f_\pi$ szolgáltatja.

Az $O(N)$ szimmetriájú modellel egyezően az állapotegyenletek a kvarkok $\langle \bar{q}q \rangle$ -val jelölt tadpole-integráljaival egészülnek ki:

$$\begin{aligned} 0 &= -\epsilon_x - m_0^2 x + 2gxy + 4f_1 xy^2 \\ &+ 2(2f_1 + f_2)x^3 + \sum_{\alpha_i \alpha_j} t_{\alpha_i \alpha_j}^x \langle \alpha_i \alpha_j \rangle + \frac{g_F}{2} (\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle), \\ 0 &= -\epsilon_y - m_0^2 y + gx^2 \\ &+ 4f_1 x^2 y + 4(f_1 + f_2)y^3 + \sum_{\alpha_i \alpha_j} t_{\alpha_i \alpha_j}^y \langle \alpha_i \alpha_j \rangle + \frac{g_F}{\sqrt{2}} \langle \bar{s}s \rangle. \end{aligned} \quad (97)$$

Ezekben az egyenletekben $\sum_{\alpha_i \alpha_j} t_{\alpha_i \alpha_j}^z \langle \alpha_i \alpha_j \rangle$ a mezonok tadpole-járulékát jelöli, α a σ, π, z pedig az x, y értékeket veheti fel, a $t_{\alpha_i \alpha_j}^z$ együttható az egyes tadpole-integrálokhoz tartozó súlyfaktor. Ez a két egyenlet az explicit szimmetriasértés erősségét jellemző ϵ_x, ϵ_y mennyiségek meghatározására használható. A fermionok renormalizált tadpole-integráljainak explicit kifejezése a következő (vö. (58)):

$$\langle \bar{q}q \rangle = 4M_q T^F(M_q) = 4M_q \left(\frac{M_q^2}{16\pi^2} \ln \frac{M_q^2}{M_{0F}^2} - \frac{1}{2\pi^2} \int_{M_q} d\omega \sqrt{\omega^2 - M_q^2} n_{FD}(\omega) \right), \quad (98)$$

ahol M_{0F} a fermionikus integrálok renormalizációjához választott skála, n_{FD} pedig a véges hőmérsékletű járulékot jellemző Fermi–Dirac-eloszlás.

Amennyiben $\mu_q = \mu_B/3$ bariokémiai potenciálon kívánjuk vizsgálni a rendszert, akkor az $n_{FD}(\omega) \rightarrow [n_{FD}(\omega + \mu_q) + n_{FD}(\omega - \mu_q)]/2$ helyettesítést kell alkalmazni, ahogyan azt (77) alatt már megtettük.

A további paraméterek rögzítésére a kvark-mezon modell esetében is a pszeudoskalár mezonspektrumot, azaz a pion, a kaon és az η tömegét használtuk. A pion esetében azonban pólustömeg helyett az $m_\pi^2 = -iG_\pi^{-1}(p=0)$ egyszerűsített definíciót kényszerültünk alkalmazni, ugyanis a pion pólustömegére és az x kondenzátumra vonatkozó egyenleteknek a fermionikus ki-terjesztés esetén bizonyos hőmérséklet felett nem volt egyidejű megoldása. A kaonra és az η -ra továbbra is a pólustömeget illesztettük a lehető legközelebb a részecskefizikai kísérleti értékekhez. A pionra és a kaonra ez esetben is előírtuk az LLK követelményét. Az így adódó 5 egyenlet, kiegészülve a (96) és (97) egyenletekkel, éppen elegendő a 9+1 paraméter meghatározására.

A pion tömegét megadó egyenlet két egyenletre bomlik az LLK-kritérium alkalmazásával:

$$\begin{aligned} M_\pi^2 &\equiv m_\pi^2 = m^2 + (4f_1 + 2f_2)x^2 + 4f_1y^2 + 2gy, \\ 0 &= m_0^2 - m^2 + \Sigma_\pi(p=0, m_i, M_u). \end{aligned} \quad (99)$$

A Σ_π sajátenergiás függvény $p=0$ -beli kifejezéséhez a nem ritka u -kvark vagy d -kvark ad járulékot: $\Sigma_\pi^F(p=0) = -2g_F^2 T_F(M_u)$. A 6. ábrán grafikusán adtuk meg a mezonok $\Sigma_\pi^B(p=0)$ járulékát. Az első egyenletből m^2 -et a piontömeggel és a többi csatolási állandó kifejezésével megadhatjuk. Ezután az összes mezon tömegének faszintú kifejezésében ezzel cserélhetjük le m^2 -t. Ezek szerepelnek a sajátenergia 1-hurok-járulékainak mezonpropagátorokban. Ezt a cserét (99) második egyenletében végrehajtva gapegyenlet adódik m_π^2 -re.

Hasonlóan két egyenletet ad az LLK-kritérium alkalmazásával a kaon-tömeg kifejezése:

$$\begin{aligned} M_K^2 &\equiv m_K^2 = m^2 + 2(2f_1 + f_2)(x^2 + y^2) + 2f_2y^2 - \sqrt{2}x(2f_2y - g), \\ 0 &= m_0^2 - m^2 + \text{Re} \{ \Sigma_K(p^2 = M_K^2, m_i) \}, \end{aligned} \quad (100)$$

amelyhez egy ritka-nemritka kvarkhurok $p^2 = m_K^2$ helyen vett kifejezése adja a fermionikus járulékot. Kifejezése a renormalizált tadpole- (T^F) és buborék- (I^F) függvényekkel a következő:

$$\begin{aligned} \Sigma_K^F(p^2 = m_K^2) = \\ -g_F^2 [T^F(M_u) + T^F(M_s) - (m_K^2 - (M_u - M_s)^2)I^F(p^2 = m_K^2, M_u, M_s)]. \end{aligned} \quad (101)$$

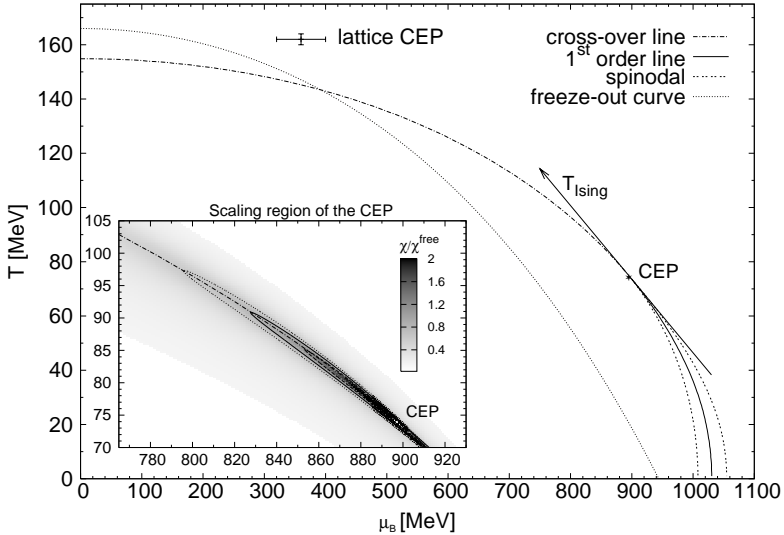
Végül az ötödik egyenletet az η -mezon 1-hurok-szinten számolt tömegének a mért értékkel való egybeesési követelménye jelenti:

$$\begin{aligned} M_\eta^2 = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ m_{\eta_{xx}}^2 + \Sigma_{\eta_{xx}}(m_i) + m_{\eta_{yy}}^2 + \Sigma_{\eta_{yy}}(m_i) \right. \\ \left. - \sqrt{(m_{\eta_{xx}}^2 + \Sigma_{\eta_{xx}}(m_i) - m_{\eta_{yy}}^2 - \Sigma_{\eta_{yy}}(m_i))^2 + 4(m_{\eta_{xy}}^2 + \Sigma_{\eta_{xy}}(m_i))^2} \right\}. \end{aligned} \quad (102)$$

A hosszú képlet az 2×2 -es $\eta - \eta'$ keveredési mátrix diagonalizálásával adódó kisebb tömeget jelenti. A $\Sigma_{\eta_{zz'}}$, $(z, z' : x, y)$ mátrix abban szereplő minden elemét a $p^2 = M_\eta^2$ helyen kell kiszámítani. A fermionikus járulékot ez esetben egy tisztán ritka kvarkhurok $p^2 = M_\eta^2$ külső impulzusnál kiszámított értéke adja.

A paraméterek meghatározásához rögzíteni kell az M_{0B}, M_{0F} renormalizációs skálákat. A két mennyiség alkotta síkon végighaladva vizsgáltunk egy olyan (bizonyos fokig önkényesen választott) mérőszámot, amely az összes megjósolt tömegérték ($\eta', a_0, f_0, \sigma, \kappa$) és fizikai értékeik eltérésének együttes nagyságát jellemzi. Ezt minimalizálja az $M_{0B} = 1210 \text{ MeV}$, $M_{0F} = 520 \text{ MeV}$ választás.

Vizsgálható a kondenzátumok nagyságának függése $\mu_q = \mu_B/3$ -tól. A változás érzékeny a normalizációs skálák megválasztására. A fenti választás mellett egy elsőrendű fázisátalakulás következik be $T = 0$ -n, amely összhangban van a közelfogadott fizikai képpel. Ha a hőmérséklet függvényében vizsgáljuk a rendparaméterek változását $\mu_q = 0$ -n, analitikus változást („crossover”-t) tapasztalunk. Ez is egyezik a legtöbb eddig elvégzett vizsgálat eredményével. A két tengelyen mutatott viselkedés ismeretéből levonható az, hogy a μ_q -tengelyen bekövetkező elsőrendű átalakulás folytatódik a $T - \mu_B$ sík belseje irányában, de a $\mu_q = 0$ tengelyre nem érkezik meg: a királis szimmetria fázisdiagramjában léteznie kell egy kritikus végpontnak (CEP) a $T - \mu_B$ síkban. Ezt a végpontot a rendparaméterek változását a $T - \mu_B$ sík belsejében letapogatva sikerült is megtalálni. Az elsőrendű átalakulási vonalat és a végpont körüli skálázás fő irányát mutatom be a 8. ábrán.



8. ábra. A kvark-mezon modell fázisdiagramja a $T = \mu$ -síkbán. A barionszám szuszceptibilitásskálázási tulajdonsága alapján a kritikus végpont az Ising-modell univerzalitási osztályába sorolható. (A [26] közleményből)

A LEHETSÉGES VILÁGOK FÁZISDIAGRAMJA

A kvantumkromodinamika számítógépes megoldása során a kvarkok tömege bemenő adatként változtatható az explicit királis szimmetriasértés erősségével. Ily módon kirajzolhatók az $(m_{u,d} - m_s)$ síkon azon tartományok, amelyekben a királis szimmetria helyreállása elsőrendű fázisátalakulással történik, illetve ahol analitikus „crossover” jellegű az átalakulás. A kétféle tartományt elválasztó határon másodrendű (folytonos) fázisátalakulás megy végbe. A nem nulla bariokémiai potenciálon végzett vizsgálatokra kiterjesztve a számításokat háromdimenziós tartományokat elválasztó másodrendű átalakulási felületek rajzolhatók ki. Ezeket a térképeket nevezem e fejezet címében „lehetséges világokra” vonatkozó ismereteknek, hiszen a kvarktömegek aktuális értékei mögött nem ismerünk semmiféle mélyebb dinamikai okot.

A kvantumtérelméletek numerikus megoldásában jelenleg csak a $\mu_B = 0$ tartományban rendelkeznek megbízható eredményekkel, ezért jelentős az érdeklődés az effektív modellekkel elvégzett, itt bemutatott nem perturbatív számításokból kapott fázisdiagramok iránt. Ezekben az $m_{u,d}, m_s$ paraméterek helyett a pion és a kaon tömege által alkotott $(m_\pi^2 - m_K^2)$ síkban vizsgálandó a fázisdiagram, amit aztán kiegészíthetünk a μ_B iránnyal. Csoportunk publikációit megelőzően az effektív modellek paramétereit meghatározó egyenletekben egyszerűen e két tömegnégyzet értékét változtatva, a többi bemenő fizikai mennyiség változatlan értéke mellett vizsgálták a királis szimmetria helyreállásának a módját. Mi mutattunk rá, hogy $m_\eta^2, m_{\eta'}^2, f_\pi, f_K$, továbbá a kvarkok konsztituens tömegének értéke $(M_{u,d}, M_s)$ is változik a két könnyű Goldstone-mezon tömegének hangolásával. Ezt a kapcsolatot mutatom be röviden, mielőtt a jelzett fázisdiagramok ismertetésére térnék rá.

A jelzett függést $T = 0$ hőmérsékleten úgy kaptuk meg, hogy lineáris szigma-modellünkötől az $SU(3) \times SU(3)$ szimmetriájú nemlineáris szigma-modell [29] megoldásával egyező eredményeket követeltünk meg. Ez utóbbi modell alacsony energián a QCD Goldstone-bozonjai dinamikáját egzaktul (a közvetlen kromodinamikai számításokkal teljes egyezésben) adja meg. Ebben a modellben kiszámítható például az $f_\pi(m_K^2, m_\pi^2)$, $f_K(m_K^2, m_\pi^2)$ függvénykapcsolat. Hasonlóan vizsgálható az $\eta - \eta'$ keveredési mátrix adatainak m_π^2, m_K^2 függése is [30]. Röviden bemutatom e kapcsolatok származtatását, majd első lépésben ezeket a használok aztán a lineáris modell megfelelő mennyiségeire $\mu_B = 0$ esetén.

A királis perturbációs számítás (ChPT) a nemlineáris szigma-modell f csatolási paraméterének inverz hatványai szerinti sorban állítja elő a fizikai mennyiségeket. (Az f szimbólum a megszokott jelölése a nemlineáris σ modell (22) Lagrange-sűrűségében szereplő s_0 -nak.) A tömegfüggések megálapítására $\mathcal{O}(1/f^2)$ pontosságú eredményeket használtunk. A pszeudoskálár mezonok tömegnégyzetei és gyenge bomlási állandói kifejezésében megjelennek a tömegfüggetlen ún. királis konstansok ($L_i, i = 4, 5, \dots, 9$), valamint a kvarkok *lagrange-i* tömegparamétereivel közvetlenül kapcsolatba hozható két állandó: $A = Bm_{u,d}, q = m_s/m_{u,d}$. A királis konstansok értékeit elegendő számú fizikai mennyiség fizikai pontbeli kifejezéseit a fenomenológiai értékekkel egyenlővé téve származtatják. Továbbá, az 1-hurok-ChPT-járulékokat jellemző ún. királis logaritmusok skálájaként jelentkeznek az M_0 normalizációs skála, amelynek értékét egyezményesen $4\pi f_\pi$ -nek választják, tehát „öröklí” f_π tömegfüggését.

Nézzük először f_π és f_K tömegfüggését a következő négy ChPT-eredmény felhasználásával:

$$\begin{aligned}
m_\pi^2 &= 2A \\
&\left[1 + \frac{1}{f^2} \left(\mu_\pi - \frac{1}{3}\mu_\eta + 16A(2L_8 - L_5) + 16A(2+q)(2L_6 - L_4) \right) \right], \\
m_K^2 &= A(1+q) \\
&\left[1 + \frac{1}{f^2} \left(\frac{2}{3}\mu_\eta + 8A(1+q)(2L_8 - L_5) + 16A(2+q)(2L_6 - L_4) \right) \right], \\
f_\pi &= f \left[1 + \frac{1}{f^2} (-2\mu_\pi - \mu_K + 8AL_5 + 8A(2+q)L_4) \right], \\
f_K &= f \left[1 + \frac{1}{f^2} \left(-\frac{3}{4}(\mu_\pi + \mu_\eta + 2\mu_K) + 4A(1+q)L_5 + 8A(2+q)L_4 \right) \right], \\
&\hspace{15cm} (103)
\end{aligned}$$

ahol $\mu_{PS} = m_{PS}^2 \ln(m_{PS}^2/M_0^2)/(32\pi^2)$ az említett királis logaritmusok kifejezése. Az első két összefüggést arra használják, hogy $\mathcal{O}(1/f^2)$ pontossággal meghatározzák A és q tömegfüggését, majd ezeket behelyettesítve a második két egyenletbe, a két bomlási állandó tömegfüggésére jutunk:

$$\begin{aligned}
f_\pi &= f \left[1 - \frac{1}{f^2} (2\mu_\pi + \mu_K - 4m_\pi^2(L_4 + L_5) - 8m_K^2 L_4) \right], \\
f_K &= f \left[1 - \frac{1}{f^2} \left(\frac{3}{4}(\mu_\pi + \mu_\eta + 2\mu_K) - 4m_\pi^2 L_4 - 4m_K^2(L_5 + 2L_4) \right) \right]. \\
&\hspace{15cm} (104)
\end{aligned}$$

Ebben az összefüggésben az η -tömeg is szerepel, de elegendő vezetőrendű ($\mathcal{O}(f^0)$) kifejezését használni, ami éppen a Gell-Mann–Okubo-összefüggés: $(4m_K^2 - m_\pi^2)/3$. A hullámfüggvény renormalizációjának tömegfüggését elhanyagolva a (104) képleteket használhatjuk (91) segítségével az explicit szimmetriasértő források (ϵ_x, ϵ_y) tömegfüggésének meghatározására. Ezt követően mód van a kondenzátumok tömegfüggésének megadására a (90) összefüggést használva.

A lineáris szigma-modell további csatolási állandóit a pszeudoskalár tömegek fagráfszintű kifejezéseiből ki lehet fejezni:

$$\begin{aligned}
f_2 &= \frac{(6f_K - 3f_\pi)m_K^2 - (2f_K + f_\pi)m_\pi^2 - 2(f_K - f_\pi)M_\eta^2}{4(f_K - f_\pi)(8f_K^2 - 8f_K f_\pi + 3f_\pi^2)}, \\
g &= \frac{2f_K m_K^2 + 2(f_K - f_\pi)m_\pi^2 - (2f_K - f_\pi)M_\eta^2}{\sqrt{2}(8f_K^2 - 8f_K f_\pi + 3f_\pi^2)}, \\
M^2 &\equiv -\mu_0^2 + 4f_1(x^2 + y^2) \\
&= \frac{1}{2}M_\eta^2 + \frac{g}{\sqrt{2}}(2f_K - f_\pi) - 2f_2(f_\pi(f_\pi - 2f_K) + 2f_K^2). \quad (105)
\end{aligned}$$

Ebben a képletsorban M_η^2 az $\eta - \eta'$ kevert tömegmátrix spúrja, amelyre újabb királis konstansok ($v_0^{(2)}, v_2^{(2)}, v_3^{(0)}$) segítségével [31]-ből vehető át $\mathcal{O}(1/f^2)$ pontosságú kifejezés:

$$\begin{aligned}
M_\eta^2 &= 2m_K^2 - 3v_0^{(2)} + 2(2m_K^2 + m_\pi^2)(3v_2^{(2)} - v_3^{(1)}) \\
&+ \frac{1}{f^2} \left[8v_0^{(2)}(2m_K^2 + m_\pi^2)(L_5 + 3L_4) + m_\pi^2(\mu_\eta - 3\mu_\pi) - 4m_K^2\mu_\eta \right. \\
&+ \frac{16}{3}(6L_8 - 3L_5 + 8L_7)(m_\pi^2 - m_K^2)^2 + \frac{32}{3}L_6(m_\pi^4 - 2m_K^4 + m_K^2 m_\pi^2) \\
&\left. + \frac{16}{3}L_7(m_\pi^2 + 2m_K^2)^2 \right]. \quad (106)
\end{aligned}$$

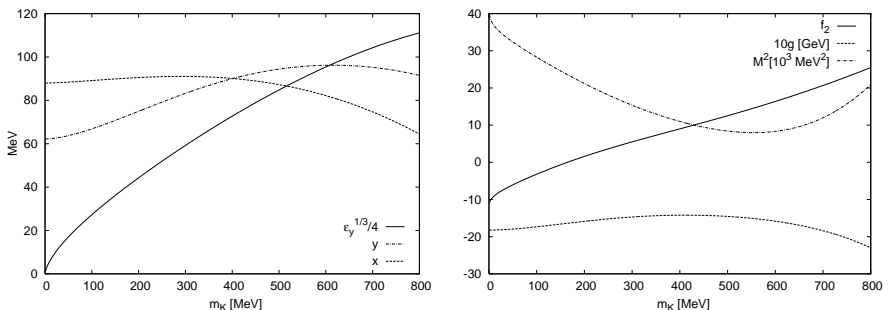
A megmaradó feladat M^2 szétbontásával f_1 és μ_0^2 tömegfüggésének meghatározása. Erre kénytelenek vagyunk a kevésbé ismert skalárszektorra vonatkozó valamilyen feltevést tenni. Egyik általunk kidolgozott lehetőség, hogy a skalárszektorra is megköveteljük a Gell-Mann–Okubo-relációt, ami ebben a szektorban $4m_\kappa^2 = m_{a_0}^2 + 3m_{\sigma_{88}}^2$ alakú (az utolsó tag a keveredő σ_0 és σ_8 tömegmátrixának „88” eleme). Ez a valamilyest önkényes követelmény az

$$f_1^{(GMO)} = \frac{4m_\pi^2(f_\pi + 2f_K) + 8M_\eta^2(f_K - f_\pi) - 12m_K^2(2f_K - f_\pi)}{32(3f_\pi^2 - 8f_\pi f_K + 8f_K^2)(f_K - f_\pi)},$$

$$\mu_0^{2(GMO)} = f_1^{(GMO)}(6f_\pi^2 - 8f_\pi f_K + 8f_K^2) - M^2 \quad (107)$$

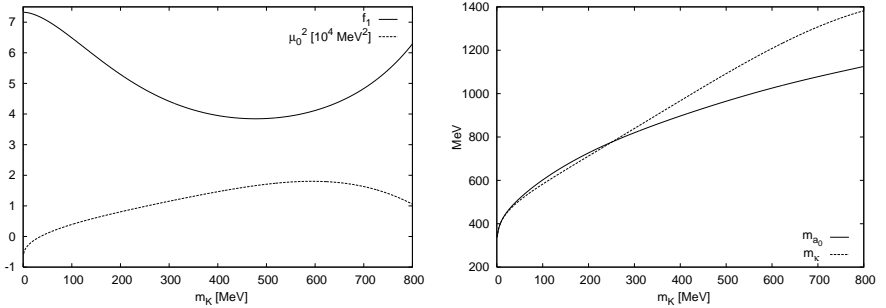
parametrizációra vezet. Más feltevésekkel is foglalkoztunk, amelynek eredményei alapján elmondható, hogy a kritikus másodrendű átalakulási görbe nem mutatkozott e feltételre túl érzékenynek.

A 9. és 10. ábrán bemutatott görbesorozat a fenti konstrukcióból létrejövő tömegfüggést mutatja be a lineáris szigma-modell különböző paramétereire. Jól látszik, hogy valamennyi paraméter lényeges változást mutat, ezért nem hihetőek a korábbi megközelítésben nyert eredmények, amelyek kizárólag az m_π^2 és m_K^2 tömegek explicit megjelenéséből származó változást vették figyelembe.

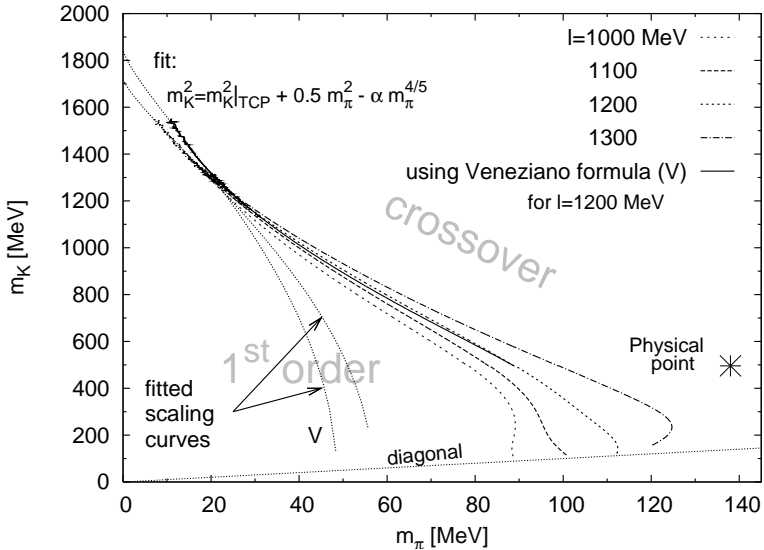


9. ábra. A bal oldalon az x , y rendparaméterek, valamint az ϵ_y szimmetriasértő forrásnak $m_\pi^2 = 0$ esetben számított m_K^2 függését mutatja, a jobb oldalon ugyanerre az esetre f_2 , g , M^2 változása látható. (A [25] közleményből)

$T = 0$ -n a leírt módon rögzített csatolásokkal lehet vizsgálni a királis szimmetria helyreállításának módját véges hőmérsékleten az $m_\pi^2 - m_K^2$ sík minden egyes pontjában. A korábban követett alfejezetben, $\mu_B = 0$ -ra a fizikai pont paramétereivel elvégzett tárgyalás ismételhető meg az $m_K - m_\pi$ -síkot végigpásztázva. A 11. ábra az $N_f = 3$ mezonelmélet keretei között, az l -vel jelölt renormalizációs skála különböző választásaira mutatja a fázishatárt az elsőrendű és a „crossover” átalakulások tartományai között. [Van köztük



10. ábra. A bal oldalon a szétválasztott f_1 és μ_0^2 , a jobb oldalon a fagráfszinten számolt skalár mezontömegek (a_0, κ) függése látszik m_K^2 -től az $m_\pi = 0$ esetben. (A [25] közleményből)



11. ábra. A királis rend megszűnésének fázisdiagramja a ritka és a nem ritka kvark tömegparaméterei alkotta síkban. A királis határeset ($m_\pi = m_K = 0$) környezete elsőrendű átalakulást mutat. A határoló másodrendű átalakulási vonalat különböző normalizációs skála értékre számoltuk ki. (A [24] közleményből)

egy görbe (a „Veneziano formula” feliratú), amely az $U_A(1)$ anomálián alapulva adja meg m_η kapcsolatát a pion és a kaon tömegével, ami tartalmaz egy, az anomáliát tükröző, gluonokból származó, kvarktömegre érzéketlen-

nek vélhető járulékot is. Ennek a megközelítésnek a bemutatása meghaladja az előadás terjedelmi korlátait.]

A kis m_π , nagy m_K tartományban a fázishatár függetlennek tűnik a renormalizációs skála megválasztásától. Ebben a tartományban elég nagy megbízhatósággal egy elméletileg megalapozott [32] skálázó viselkedést lehet illeszteni a fázishatár görbéjére:

$$m_K^2(\text{határ}) = m_K^2|_{TCP} + \frac{1}{2}m_\pi^2 - \alpha m_\pi^{4/5}. \quad (108)$$

Itt $m_K^2|_{TCP}$ az $m_\pi = 0$ tengelyen várt trikritikus ponthoz (TCP) tartozó kaon-tömeg, amelynek nagyságára 1,7–1,8 GeV adódott, a kritikus görbének a sík belső pontjaira a modellből számított koordinátáit extrapolálva az $m_\pi = 0$ tengelyhez. A trikritikus pont létezésének és értéke becsülhető nagyságának javarészt modellfüggetlen elemzése található Jakovác és Szép újabb publikációjában [33]. Az $m_\pi = m_K$ „diagonálison” az egyenletek elfajultak, közvetlen számítás a kritikus pont helyzetére nem végezhető. Ehhez közeledve már nagyon érzékeny a határ a normalizációs skála választására: a szemmel történő extrapolációból az origótól (90, 130) MeV távolságra tehető a kritikus pont, ami magasabb a lineáris szigma-modell kvantumkorrekciók nélküli tárgyalásából nyerhető becslésnél és a rácsszimulációs előzetes adatoknál is.

A fázisdiagram kiterjesztése μ_B -irányba a ritka és a nem ritka kondenzátum egyenletének a pion gapegyenletével szinkronban történő megoldását igényli. A (97) egyenletekben expliciten kiírva a mezon- és a kvarktadpole-járulékokat a megoldandó egyenletek a következők:

$$\begin{aligned} 0 &= -\epsilon_x + m^2x + 2gxy + 4f_1xy^2 + 2(2f_1 + f_2)x^3 \\ &+ \sum_i t_i^x T^F(m_i(m_\pi), T) - 4M_u T^F(M_u, T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= -\epsilon_y + m^2 y + g x^2 + 4f_1 x^2 y + 4(f_1 + f_2)y^3 \\
&+ \sum_i t_i^y T^F(m_i(m_\pi), T) - 2\sqrt{2}M_s T^F(M_s, T), \\
m_\pi^2 &= -\mu_0^2 + 2(f_2 + 2f_1)x^2 + 4f_1 y^2 + 2gy + \Sigma_\pi(p=0, m_i(m_\pi), M_u).
\end{aligned} \tag{109}$$

Ezekben az egyenletekben már a határozott tömegsajátértékkel jellemezhető mezonok járulékaik szerepelnek, de nem vezettük be az azonos tömegű izomultiplettek degenerációját kifejező faktort.

A korábbi csatolásokon túl most szükség van a *konsztituens* kvarktömegek függésére m_π^2 -től és m_K^2 -től. A [26] cikk a nukleonokra kiterjesztett ChPT-vel nyert nukleontömegeket [34] egyszerű additív kvarkmodell révén kapcsolta a kvarkok tömegéhez:

$$M_{u,d} = \frac{1}{3}M_N, \quad M_s = \frac{1}{2}(M_\Lambda + M_\Sigma) - 2M_u. \tag{110}$$

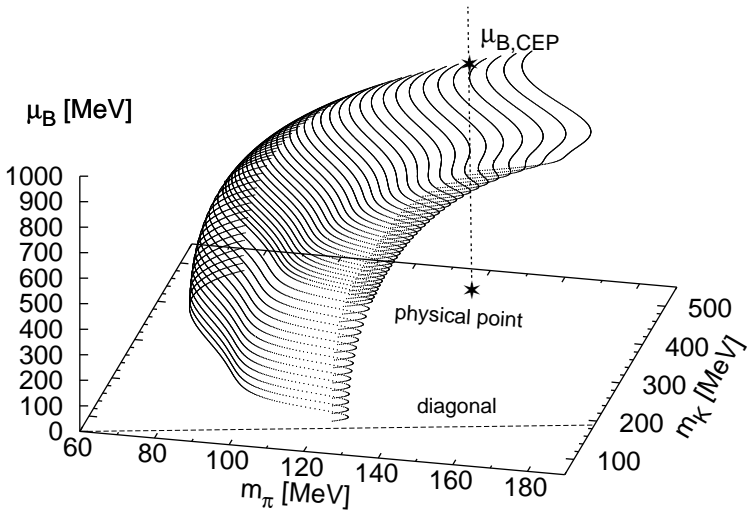
A B barion tömegképlete a mezonok tömegnégyzeteivel kifejezve [34] alapján $\mathcal{O}(1/f^2)$ pontossággal a következő:

$$M_B = M_b - 2b_0(m_\pi^2 + m_K^2) + b_d\gamma^D + b_F\gamma^F - \frac{1}{24\pi f^2} (\alpha_B^\pi m_\pi^3 + \alpha_B^K m_K^3 + \alpha_B^\eta m_\eta^2). \tag{111}$$

Ebben a képletben a B alsó index végigfut a barion oktett izomultipllettjein (N, Σ, Λ, χ), míg $M_b, b_0, b_D, b_F, \alpha_B^\pi, \alpha_B^K, \alpha_B^\eta$ a királis barionmodell legalacsonyabb rendű Lagrange-sűrűségének csatolásaiból származtatható mennyiségek, amelyeket a fizikai pont barionadatai segítségével lehet számszerűsíteni. Végül

$$\begin{aligned}
\gamma_N^D &= \gamma_\chi^D = -4m_K^2, & \gamma_\Sigma^D &= -4m_\pi^2, & \gamma_\Lambda^D &= -4m_\eta^2, \\
\gamma_N^F &= -\gamma_\chi^F = 4(m_K^2 - m_\pi^2), & \gamma_\Sigma^F &= \gamma_\Lambda^F = 0.
\end{aligned} \tag{112}$$

Ezzel a (109) egyenletrendszer megoldásához szükséges m_π^2, m_K^2 -hangolást az összes konstansra megadó, határozott eljárás áll rendelkezésre. Az elsőrendű átalakulás pontjait az x -kondenzátum többértékűvé válása jelzi. Megszűnése rajzolja ki a μ_B, m_π^2, m_K^2 háromdimenziós térben a másodrendű átalakulási felületet. Ezt mutatja a 12. ábra. (Az $m_\pi = m_K$ „fal” ez esetben sem érhető el, mivel az egyenletek degenerációja miatt ott a megoldás eltűnik, de simasági feltevessel lehetséges az extrapoláció.)



12. ábra. A királis rend megszűnésének fázisdiagramja az $(m_\pi^2 - m_K^2 - \mu_B)$ térben. (A [26] közleményből)

A másodrendű felület majdnem merőlegesen nő ki a $\mu_B = 0$ síkból. Utána elhajlik a μ_B -tengelytől, így a fizikai pontra emelt merőleges átdöfi. Ez a pont a fizikai QCD nagy μ_B -értékekre várt elsőrendű átalakulási vonalának kritikus végpontjára a lineáris szigma-modell számításaiból kapott becslés: $\mu_B^{CEP} \approx 895 \text{ MeV}, T^{CEP} \approx 75 \text{ MeV}$. Ez jócskán eltér a QCD numeri-

kus szimulációjával nyert eddigi becsléstől, de a véges bariokémiai potenciállal nyerhető szimulációs eredmények korrektsége még eléggé vitatott.

BEFEJEZÉS

Előadásomban a 2001–2007 között folytatott kutatásaimnak azt a szeletét mutattam be, amely az erősen kölcsönható anyag királis fázisdiagramjának a véges hőmérséklet és a véges barionsűrűség hatására elkülönülő tartományai feltérképezését tartotta céljának. A nagyenergiás nehézion-kísérletek értelmezésében az egyensúlyi fázisok minél részletesebb jellemzése mellett fontos a valós idejű dinamika elméleti tárgyalása. Megemlítem, hogy az előadás anyaga kiválogatásában figyelembe vett 6 évben aktív kutatást folytattunk e vizsgálatok területén is [35, 36, 37, 38, 39], de a bemutatás homogenitása érdekében e munkák eredményeinek ismertetéséről lemondtam.

Az eltelt idő lehetővé teszi, hogy röviden kitérjek azokra az újabb eredményekre, amelyeket a bemutatott munkák alapoztak meg. A 2PI-formalizmus (kétrészecske irreducibilis diagramok) alkalmazása éppen az évezredfordulón újult meg [40], amely munkák hatékony algoritmussá fejlesztésében csoportunk egyik doktorandusza is lényeges szerepet játszott Erasmus-diákként végzett kutatásaival. E kapcsolat révén is természetes volt tehát, hogy a figyelmünket megragadta a perturbációs sor ezen újraösszegzésének kérdésköre. Kezdeti „betanuló” vizsgálódásaink [19, 41, 42, 20] után, ezt az irányzatot Szép Zsolt és francia partnerei együttműködése révén integráltuk technikai eszköztárunkba. A 2PI-technika hatékony felhasználásának példái azok a nagy N sorfejtés kapcsán már említett munkáink, amelyekkel ellentagos formalizmusban kidolgoztuk az $O(N)$ -modell nagy N sorfejtése vezető utáni (NLO) rendjének renormalizálhatóságát [16, 17]. A 2PI-egyenletek megoldási eljárásai fejlesztésének egyik gyorsan fejlődő irányzata az egzakt renormalizációs csoport (ERG) egyenleteinek használata.

A jelen dolgozat írásának időszakában az ERG vizsgálata áll érdeklődésünk előterében.

Végül, mint az előadáson is történt, köszönetet szeretnék mondani mindazoknak a kollégáknak, akik kemény munkája és fizikai intuíciója nélkül elképzelhetetlen lett volna mindannak a kutatási programnak az elvégzése, amelyről az előző fejezetekben beszámoltam. Ebben az időszakban szerzett PhD-fokozatot és vált nemzetközileg is ismert kutatóvá Szép Zsolt, Borsányi Szabolcs és Sexty Dénes. Szép Zsolt eredményesen kapcsolódott be a témavezetői munkákba, amelynek során tudományos fokozatot szerzett Herpay Tamás és Kovács Péter. Az időszak végén csatlakozott hozzánk doktoranduszként Fejős Gergely, aki azóta szintén megszerezte PhD-fokozatát.

Hadd soroljam fel azokat a külföldi barátainkat, akikkel kutatásaink során intenzív szakmai kapcsolatot alakítottunk ki. Különösen doktoranduszaink tanulmányútjainak fogadásával, workshopjaink diszkusszióiban való gyakori részvételével járult hozzá eredményeinkhez Jürgen Berges (Heidelberg), Jan Smit (Amsterdam) és Jens-Olof Andersen (Trondheim). Jelenleg is nagyon szoros a munkakapcsolatunk Urko Reinosával (Palaiseau) és Julien Serreau-val (Párizs).

Két kollégámat-barátomat kiemelten szeretném megemlíteni. Jakovác Antal önálló kutatási programjának megvalósítása közben folyamatos diszkussziópartnerünk volt. Több cikkben vállalt társszerzői közreműködést, és végül 2012-ben, nagy örömmre, egyetemi tanári pályázatával véglegesen elkötelezte magát csoportunk programja mellett. Szépfalusy Péter kezdeményező szerepvállalása nélkül a bemutatott kutatási program talán nem is jött volna létre, de mindenképpen más irányban fejlődött volna. A nagy N ki-fejtés alkalmazásával elért eredményeink valójában az $O(N)$ -szimmetrikus statisztikus fizikai rendszerek fázisátalakulásainak kutatásában általa elért,

nemzetközileg is kiemelkedő eredmények részecskefizikai „átültetéseként” értékelhetők. Azzal a gesztusával, hogy felkért MTA-támogatású csoportjának vezetésére 2001 és 2006 között, megteremtette programunk megvalósításának intézményi hátterét is.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ez az összefoglaló áttekintés tisztelgés Szépfalusy Péter professzori és emberi kiválósága előtt. Megköszönöm Jakovác Antalnak és Szép Zsolt-nak a dolgozat első változatának kritikus szemű elolvasása nyomán tett javaslataikat.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Patkós András, *A részecskefizika rejtőzködő szimmetriái*, Fizikai Szemle **LVIII** (2008) 126–131.
- [2] W. Heisenberg, *Z. f. Physik* **77** (1932) 1.
- [3] B. Cassen and E. V. Condon, *Phys. Rev.* **50** (1936) 846.
- [4] E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **51** (1937) 106.
- [5] H. Yukawa, *Proc. Phys.-Math. Soc. of Japan* **17** (1935) 48.
- [6] N. Kemmer, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A166** (1938) 127.
- [7] M. H. Johnson and E. Teller, *Phys. Rev.* **98** (1955) 783.
- [8] Y. Nambu, *Phys. Rev. Letters*, **4** (1960) 380.
- [9] M. Gell-Mann and M. Lévy, *Nuovo Cim.* **16** (1960) 705.
- [10] J. Goldstone, *Nuovo Cim.* **19** (1961) 154.
- [11] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122** (1961) 345; *ibid.* *Phys. Rev.* **124** (1961) 246.
- [12] A. Patkós, Zs. Szép and P. Szépfalusy, *Phys.Lett.* **B537** (2002) 77.
- [13] A. Patkós, Zs. Szép and P. Szépfalusy, *Phys.Rev.* **D66** (2002) 116004.
- [14] A. Patkós, Zs. Szép and P. Szépfalusy, *Phys.Rev.* **D68** (2003) 047701.
- [15] A. Jakovác, A. Patkós, Zs. Szép and P. Szépfalusy, *Phys.Lett.* **B582** (2004) 179.

- [16] G. Fejős, A. Patkós and Zs. Szép, Phys.Rev. D**80** (2009) 025015.
- [17] G. Fejős, A. Patkós and Zs. Szép, Phys.Rev. D**90** (2014).
- [18] Patkós András, *Mekkora a kvarkok tömege?*, Fizikai Szemle, **LXIII** (2013) 368.-373.
- [19] A. Patkós and Zs. Szép, Phys. Lett. B**642** (2006) 384.
- [20] A. Patkós and Zs. Szép, Nucl. Phys. A**811** (2008) 329.
- [21] S. Chiku and T. Hatsuda, Phys. Rev. D**58** (1998) 076001.
- [22] A. Okopinska, Phys. Rev. D**36**, 2415 1987.
- [23] N. Banerjee and S. Mallik, Phys. Rev. D**43**, 3368 1991.
- [24] T. Herpay and Zs. Szép, Phys. Rev. D**74** (2006) 025008.
- [25] T. Herpay, A. Patkós, Zs. Szép and P. Szépfalusy, Phys. Rev. D**71** (2005) 125017.
- [26] P. Kovács and Zs. Szép, Phys. Rev. D**75** (2007) 025015.
- [27] G. 't Hooft, Phys. Rev. D**14** (1976) 3432, (E) *ibid.* **18** (1978) 2199.
- [28] L.-H. Chan and R.W. Haymaker, Phys. Rev. D**7** (1973) 402.
- [29] J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B**250** (1985) 465.
- [30] P. Siklody-Herrera, J.I. Latorre, P. Pascual and J. Taron, Phys. Lett. B**419** (1998) 326.
- [31] B. Borasoy and S. Wetzel, Phys. Rev. D**63** (2001) 074019.
- [32] Y. Hatta and T. Ikeda, Phys. Rev. D**67** (2003) 014028.
- [33] A. Jakovác and Zs. Szép, Phys. Rev. D**82** (2010) 125038.
- [34] V. Bernard, N. Kaiser and U.-G. Meissner, Int. J. Mod. Phys. E**4** (1995) 193.
- [35] Sz. Borsányi, A. Patkós, D. Sexty, Zs. Szép, Phys. Rev. D**64** (2001) 125011.
- [36] Sz. Borsányi, A. Patkós, D. Sexty, Phys. Rev. D**66** (2002) 025014.
- [37] Sz. Borsányi, A. Patkós and D. Sexty, Phys. Rev. D**68** (2003) 063512.
- [38] D. Sexty and A. Patkós, Phys. Rev. D**71** (2005) 025020.
- [39] D. Sexty and A. Patkós, JHEP **0510** (2005) 054.
- [40] J. Berges, Sz. Borsányi, J. Serreau and U. Reinosa, Ann. Phys. (Amsterdam) **320** (2005) 344.
- [41] A. Patkós and Zs. Szép, Europhys. Lett. **79** (2007) 51001.
- [42] G. Fejős, A. Patkós and Zs. Szép, Nucl. Phys. A**803** (2008) 115.

Erdy János
Bodhradovszky József

Wenzel Gusztáv
Fábian Lajos
Nagy János

Arany János
Terintetes Nagygyűlés!

Minden felemelő szabályainak 32. §-a egy szót:
Minden újonnan választott tag, a külső kivétel
lével, osztályába tartozó dolgotat felolvasásával,
vagy személyes meg nem jelenhetős esetén helyettes
sével, legfeljebb egy év alatt kétszer; külsőben meg
választása meg nem működően:

Lehetett esetek, melyekben kivált vidéken la-
kor gátolhatta a határidőt megtartani: de hallga-
tag elvéni a szabály meg nem tartatását, amellyel
kés, mint örvös szabályzatunkat erőltetve terintem
a következéskorra figyelmeztettem J. Aradon
át sürgetélen.
Indoklásba hozatik tehát, hogy egyelőre a
kötött s sürgetéssel által meg nem
hát követéskor, az 1866
kötéskor, az 1866

